

Filtrage d'un signal périodique

1. Introduction

L'objectif est d'étudier le filtrage d'un signal périodique par un filtre analogique. Nous utilisons le filtre passe-bas du second ordre dont la réponse fréquentielle a été étudiée dans le TP [Réponse fréquentielle d'un filtre analogique](#). Cette étude nous permettra d'aborder trois applications différentes d'un filtre passe-bas.

Le script [filtre-passe-bas.py](#) permet de tracer la réponse fréquentielle théorique de ce filtre. La fréquence de coupure sera si nécessaire modifiée pour correspondre à celle relevée sur le filtre réel.

Pour générer un signal périodique comportant quelques harmoniques (au maximum quatre), on utilisera la sortie son du PC et la fiche PureData [syntheseHarmonique.pd](#).

Le script [analyse-spectrale-2voies.py](#) effectue l'acquisition sur les voies A0 et A1 de la carte Sysam SP5 et trace les deux spectres en échelle décibel, ce qui permet de lire avec précision l'amplitude des harmoniques faibles.

2. Filtre réducteur de bruit

Un filtre passe-bas peut être utilisé pour réduire le bruit présent dans un signal périodique, sans altérer la forme de ce signal. Pour cela, le signal doit être dans la bande passante du filtre. Un signal périodique est dans la bande passante du filtre si tous ses harmoniques sont dans la bande passante.

La bande passante d'un filtre passe-bas idéal est définie par un gain unité ($G = 1$) et par un déphasage variant linéairement avec la fréquence, soit $\psi = -2\pi\tau f$ où τ est le retard.

L'entrée et la sortie du filtre sont respectivement notées $e(t)$ et $s(t)$.

[1] Écrire la série de Fourier de $e(t)$ en supposant qu'elle s'arrête au rang P . En déduire la série de Fourier de $s(t)$ pour un filtre idéal si tous les harmoniques sont dans la bande passante. Démontrer que la sortie est identique à l'entrée mais retardée.

Pour un filtre d'ordre 2, la linéarité du déphasage par rapport à la fréquence est très bien vérifiée. En revanche, le gain dans la bande passante décroît progressivement à l'approche de la coupure (mais moins que pour un filtre d'ordre 1). Il est néanmoins possible d'obtenir un signal de sortie assez proche du signal d'entrée.

[2] Générer un signal périodique comportant trois harmoniques de rang 1, 2 et 3. Ajuster les amplitudes pour que l'harmonique de rang 2 soit environ deux fois plus faible que le fondamental et l'harmonique de rang 3 environ trois fois plus faible que le fondamental. Ajouter du bruit au signal.

[3] Effectuer le filtrage de ce signal. Comparer l'entrée et la sortie avec l'oscilloscope.

[4] Placer tout d'abord l'harmonique de rang 3 sur la fréquence de coupure du filtre. Abaisser la fréquence jusqu'à obtenir un signal de sortie visuellement identique au signal d'entrée. Mesurer le décalage temporel entre les deux signaux. Expliquer la valeur obtenue à l'aide de la courbe de déphasage du filtre.

[5] Faire l'analyse spectrale de l'entrée et de la sortie à l'aide du script [analyse-spectrale-2voies.py](#). Comment le bruit se manifeste-t-il sur le spectre? Constater sa réduction sur le spectre du signal de sortie.

[6] Observer la déformation du signal qui survient lorsqu'un ou plusieurs harmoniques sont

dans la bande atténuante du filtre.

3. Filtre anti-repliement

L'analyse spectral d'un signal périodique comportant beaucoup d'harmoniques peut être délicate en raison du phénomène de repliement de spectre. Un signal riche en harmonique facile à généré est le signal en dents de scie. Les amplitudes des harmoniques d'un signal en dents de scie sont décroissantes en $1/n$.

[7] Calculer, pour les harmoniques de rang 1 à 9, l'amplitude en décibel des harmoniques (théorique), en attribuant la valeur 0 au fondamental. Reporter ces valeurs dans un tableau.

[8] Générer un signal en dents de scie de fréquence voisine de 100 Hz mais légèrement différente, par exemple 101,37 Hz. Pour une fréquence d'échantillonnage $f_e = 2000$ Hz et une durée $T = 5$ s, tracer le spectre.

[9] Comment le repliement des raies de fréquences supérieures à 1000 Hz se manifeste-t-il ?

[10] Relever l'amplitude des harmoniques (en décibel) jusqu'au rang 9 et comparer aux amplitudes théoriques.

[11] Refaire l'expérience avec une fréquence exactement 100,000 Hz. Relever l'amplitude des harmoniques (en décibel) jusqu'au rang 9 et comparer aux amplitudes théoriques. À quoi peut-on attribuer cette discordance ?

Un filtre anti-repliement permet de réduire le phénomène de repliement de spectre. Pour cela, la fréquence de coupure du filtre doit être ajustée à la moitié de la fréquence d'échantillonnage. C'est bien le cas ici car $f_c = 1000$ Hz et $f_e = 2000$ Hz.

[12] Mettre en place le filtre anti-repliement puis obtenir le spectre de l'entrée et de la sortie, pour un signal en dents de scie de fréquence 100,000 Hz. Quel est l'inconvénient de cette méthode de réduction du repliement ?

La fonction de transfert du filtre étant connue (voir script [filtre-passe-bas.py](#)), il est possible de modifier le spectre dans la bande $[0, 1000]$ Hz afin de le corriger de l'effet d'atténuation du filtre et d'obtenir ainsi des raies de hauteurs correctes.

[13] Compléter le script [analyse-spectrale-2voies.py](#) afin qu'il trace ce spectre corrigé. Faire les relevés d'amplitude et comparer au spectre théorique. Conclure sur l'efficacité de la méthode.

4. Génération d'un signal quasi sinusoïdal

Un filtre passe-bas du second ordre peut servir à générer un signal quasi sinusoïdal à partir d'un signal triangulaire, lui-même pouvant facilement être obtenu à partir d'un signal créneau à l'aide d'un intégrateur.

[14] Proposer un circuit simple permettant de réaliser l'intégration d'un signal créneau de fréquence 1000 Hz.

[15] On souhaite utiliser le filtre passe-bas pour extraire le fondamental d'un signal triangulaire en atténuant au maximum ses harmoniques. Quel est le meilleur choix pour la fréquence de ce signal triangulaire ?

[16] Réaliser l'expérience et faire l'analyse spectrale de l'entrée et de la sortie du filtre, avec une fréquence d'échantillonnage assez élevée pour avoir un repliement négligeable. Peut-on dire que le signal de sortie est quasi sinusoïdal ?

Pour un signal quasi sinusoïdal, on définit le *taux de distorsion harmonique* (TDH) comme le rapport de la somme des amplitudes au carré des harmoniques à partir du rang 2 par la somme des amplitudes au carré de tous les harmoniques, soit :

$$TDH = \frac{\sum_{n=2}^N C_n^2}{\sum_{n=1}^N C_n^2}$$

où N est le rang de l'harmonique le plus élevé pris en compte.

[17] Calculer le taux de distorsion harmonique du signal quasi sinusoïdal obtenu par filtrage. On prendra $N = 9$.