

# Ondes lumineuses et interférences

## 1. Ondes lumineuses scalaires

### 1.a. Ondes lumineuses scalaires et intensité

Une onde lumineuse est une onde électromagnétique visible, dont la longueur d'onde est comprise entre 400 et 700 nanomètres (environ). L'optique est un domaine de la physique qui s'intéresse aux ondes lumineuses, mais aussi aux ondes ultraviolettes et du proche infrarouge. Ces ondes sont caractérisées par un certain type d'interaction avec les atomes : elles peuvent déclencher des transitions de niveaux d'énergie des électrons dans les atomes. Autrement dit, l'énergie  $E = \hbar\omega$  d'un photon du domaine optique est de l'ordre des différences d'énergie des électrons dans les atomes, c'est-à-dire de l'ordre de l'électron-volt.

Un problème d'optique important est celui de la surposition d'ondes électromagnétiques, qui peut donner un phénomène d'interférence. En principe, une onde électromagnétique est une onde vectorielle. Cette caractéristique apparaît dans les expériences de polarisation de la lumière. Il existe néanmoins une famille d'expériences dans lesquelles la polarisation n'intervient pas directement. Dans ce cas, l'onde peut être traitée comme une fonction scalaire.

Dans ce type d'expériences, on considère la superposition de deux ondes (ou plus) dont les champs électriques ont pratiquement la même direction à tout instant :

$$\vec{E} = E_1 \vec{u} + E_2 \vec{u} = (E_1 + E_2) \vec{u} \quad (1)$$

La direction des champs peut dépendre du point considéré et du temps, mais les champs additionnés ont toujours la même direction, définie par le vecteur unitaire  $\vec{u}$ . Cette propriété permet de définir une onde scalaire qui représente la composante du champ électrique sur ce vecteur. Comme il s'agit le plus souvent d'une approximation, on parle d'approximation des ondes scalaires.

Pour définir plus précisément la fonction d'onde, on fait intervenir le flux d'énergie surfacique. Rappelons que pour une onde plane progressive monochromatique se propageant dans le vide, le vecteur de Poynting est :

$$\Pi_x = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(kx - \omega t) \quad (2)$$

Les capteurs de lumière sont des capteurs de puissance, sensibles au flux d'énergie. Ils se comportent comme des filtres passe-bas et sont incapables de réagir aux variations du vecteur de Poynting, dont la période est de l'ordre de  $10^{-14}$  secondes. Un capteur est caractérisé par une fréquence de coupure ou bien par son inverse, son temps de réponse  $\tau_r$ . Le temps de réponse est de l'ordre de la microseconde pour un détecteur à photodiode, de l'ordre de 1/50 secondes pour l'œil. La grandeur mesurable est donc une moyenne définie par :

$$\langle \Pi_x \rangle_{\tau_r} = \frac{1}{\tau_r} \int_0^{\tau_r} \Pi_x(x, t) dt \quad (3)$$

Puisque le temps de réponse est extrêmement grand par rapport à la période d'oscillation du champ, la moyenne précédente peut être remplacée par une moyenne sur un nombre entier de périodes, égale à la moyenne sur une période :

$$\langle \Pi_x \rangle_{\tau} \simeq \langle \Pi_x \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \Pi_x(x, t) dt = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \quad (4)$$

Cette moyenne est l'intensité  $I$  de l'onde lumineuse, mesurée en  $W/m^2$ . Pour une surface quelconque recevant un flux lumineux (par exemple la surface d'un capteur), on définit l'éclairement  $\epsilon$  en un point de la surface comme la puissance reçue par unité de surface en ce point. Si la normale en ce point fait un angle  $\theta$  avec le vecteur de Poynting, l'éclairement est lié à l'intensité par :

$$\epsilon = I \cos \theta \quad (5)$$

Dans la plupart des expériences, la surface réceptrice est pratiquement perpendiculaire au flux d'énergie, et on peut donc confondre intensité et éclairement.

La fonction d'onde utilisée pour décrire une onde lumineuse dans l'approximation scalaire est définie par sa relation à l'intensité, de la manière suivante :

L'intensité lumineuse est la moyenne temporelle du carré de la fonction d'onde.

$$I(\vec{r}) = \langle a^2(\vec{r}, t) \rangle \quad (6)$$

Dans le vide, la fonction d'onde vérifie l'équation des ondes (ou équation de d'Alembert) :

$$\nabla^2 a = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} \quad (7)$$

Dans le domaine optique, la fonction d'onde n'est pas directement accessible à l'expérience en raison de la très grande fréquence d'oscillation du champ. La grandeur mesurable est l'intensité, égale à la moyenne temporelle de son carré.

### 1.b. Ondes progressives monochromatiques

Une source de lumière ponctuelle émettant de manière isotrope génère dans l'espace une onde sphérique, de la forme :

$$a(r, t) = \frac{\alpha}{r} \cos(kr - \omega t) \quad (8)$$

Si le milieu de propagation est transparent et homogène, il est caractérisé par un indice de réfraction  $n$ . La vitesse de phase dans ce milieu est  $c/n$ ; la relation de dispersion est donc :

$$k = \frac{\omega}{c} n \quad (9)$$

Il est d'usage d'introduire la longueur d'onde dans le vide :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda_0} n \quad (10)$$

Pour une onde de fréquence donnée, c.a.d. de longueur d'onde dans le vide donnée, le nombre d'onde est proportionnel à l'indice de réfraction. On utilise aussi la représentation complexe d'une onde monochromatique :

$$\underline{a}(\vec{r}, t) = \underline{A}(\vec{r}) e^{-i\omega t} \quad (11)$$

La grandeur  $A$  est l'amplitude complexe de l'onde. Cette écriture générale permet de représenter différents types d'ondes (planes, sphériques, etc.). L'intensité de l'onde est :

$$I(\vec{r}') = \langle \text{Re}(\underline{a})^2 \rangle = \frac{1}{4} \langle (\underline{a} + \underline{a}^*)^2 \rangle \quad (12)$$

Après développement et calcul de la valeur moyenne, on obtient :

$$I(\vec{r}') = \frac{1}{2} \underline{A}(\vec{r}') \underline{A}(\vec{r}')^* \quad (13)$$

On s'intéresse le plus souvent aux variations relatives d'intensité d'un point à l'autre de l'espace, on peut donc ignorer le facteur 1/2 dans cette expression.

Pour l'onde sphérique définie ci-dessus, on a :

$$\underline{A}(r) = \frac{\alpha}{r} e^{ikr} \quad (14)$$

L'intensité décroît comme l'inverse du carré de la distance à la source.

On définit une phase indépendante du temps comme l'argument de l'amplitude complexe :

$$\underline{A}(\vec{r}') = A(\vec{r}') e^{i\phi(\vec{r}')} \quad (15)$$

Pour une onde sphérique émise par une source ponctuelle  $S$  se propageant dans un milieu homogène d'indice de réfraction  $n$ , la phase est :

$$\phi(\vec{r}') = \frac{2\pi}{\lambda_0} nr = \frac{2\pi}{\lambda_0} [SM] \quad (16)$$

La grandeur  $[SM] = nr$  égale à l'indice multipliée par la distance est appelée *chemin optique*.

Lorsqu'on se place à grande distance de la source, et que l'on considère une région de l'espace petite par rapport à cette distance, l'onde sphérique est assimilable à une onde plane :

$$\underline{A}(\vec{r}') = A e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}'} \quad (17)$$

où  $A$  est une amplitude constante. Le vecteur d'onde s'écrit :

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda_0} n \vec{u} \quad (18)$$

où  $\vec{u}$  est un vecteur unitaire donnant la direction et le sens de propagation.

On peut voir une onde plane comme l'onde émise par une source ponctuelle située à une distance infinie de l'observateur.

On définit les surfaces de phase comme les surfaces de phase égale. Pour une onde sphérique, les surfaces de phase sont des sphères centrées sur la source. Pour une onde plane, les surfaces de phase sont des plans perpendiculaires au vecteur d'onde.

### 1.c. Ondes quasi monochromatiques

Les ondes réelles ne sont pas strictement monochromatiques, mais tout au plus quasi monochromatiques. Une émission de lumière quasi monochromatique a lieu lorsque les atomes de la source subissent des transitions électroniques entre deux niveaux d'énergie. Ces transitions s'observent dans les gaz excités par des décharges électriques. Les lampes à gaz basse pression (ou lampes spectrales) sont des lampes à décharge dont le gaz émet des raies quasi

monochromatiques. Il s'agit d'une émission spontanée, à la suite d'une excitation d'un électron de l'atome par interaction avec un électron de la décharge. Dans les lasers, l'émission se fait par une transition entre deux niveaux stimulée par l'onde stationnaire maintenue dans la cavité.

La lumière quasi monochromatique est caractérisée par sa pulsation  $\omega$  (ou sa fréquence  $f$ ) et par son temps de cohérence  $\Delta t$ . Le temps de cohérence est la durée pendant laquelle l'oscillation du champ est sinusoïdale. À une échelle de temps plus grande, il y a des sauts de phase aléatoires, qui se produisent en moyenne tous les  $\Delta t$ . Une onde quasi monochromatique peut donc être représentée par la fonction suivante

$$\underline{a}(\vec{r}, t) = A e^{i(\phi(\vec{r}) - \omega t + \psi(t))} \quad (19)$$

La fonction  $\psi(t)$  prend une valeur constante pendant le temps de cohérence puis change aléatoirement de valeur.

La présence de ces sauts de phase a pour conséquence un petit étalement de la fréquence, qui donne une largeur non nulle à la raie spectrale. La simulation [Train d'ondes et temps de cohérence](#) montre l'influence du temps de cohérence sur le spectre de l'onde. La largeur spectrale de la raie quasi monochromatique est reliée au temps de cohérence par la relation :

$$\Delta f \Delta t \simeq 1 \quad (20)$$

On définit aussi la *longueur de cohérence* comme la longueur de l'onde entre deux sauts de phase :

$$\Delta l = c \Delta t \quad (21)$$

Si le spectre est défini en fonction de la longueur d'onde, la largeur d'une raie vérifie la relation :

$$\frac{\Delta \lambda}{\lambda} = \frac{\lambda}{\Delta l} \quad (22)$$

▷ Exercice : Pour un temps de cohérence de une nanoseconde, calculer la longueur de cohérence et la largeur de raie.

La longueur de cohérence est de l'ordre du centimètre pour les raies des lampes spectrales. Pour les lasers à gaz, elle peut être beaucoup plus grande, de l'ordre de plusieurs mètres, ou même de plusieurs kilomètres pour les lasers à très grande cohérence temporelle.

## 2. Approximation de l'optique géométrique

### 2.a. Définition

Dans un dispositif optique, l'onde issue d'une source ponctuelle rencontre différents objets sur lesquelles elle subit des réflexions ou des réfractions (miroirs, lentilles, diaphragmes, etc.). Soit  $L$  la taille du plus petit objet. L'approximation de l'optique géométrique s'applique lorsque cette taille est beaucoup plus grande que la longueur d'onde.

$$L \gg \lambda \quad (23)$$

En pratique, cette approximation s'applique assez bien pour des objets dont la taille est de l'ordre du centimètre ou plus.

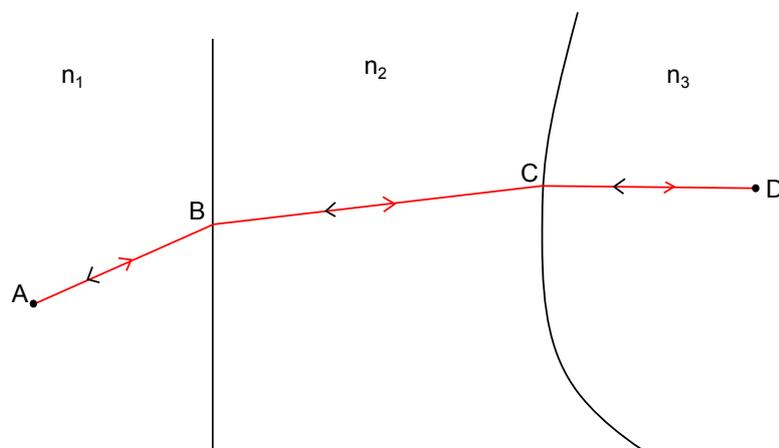
Lorsque cette condition est vérifiée, la propagation de la lumière peut être entièrement décrite en terme de *rayons lumineux*, au moyen de règles géométriques.

La théorie géométrique de la lumière a été élaborée au 17<sup>e</sup> siècle (Descartes, Fermat, Huygens). On sait aujourd'hui qu'elle peut se déduire des équations de Maxwell à la limite où la longueur d'onde tend vers zéro.

Lorsque la condition précédente n'est pas vérifiée, on observe des phénomènes qui ne peuvent s'expliquer par les lois de l'optique géométrique. Le phénomène de diffraction est un exemple de phénomène optique non géométrique.

### 2.b. Rayons lumineux et chemin optique

D'une manière générale, un rayon lumineux est une courbe de l'espace. Dans un milieu homogène, les rayons lumineux sont rectilignes. Lorsqu'un rayon rencontre la surface de séparation entre deux milieux homogènes (appelée dioptré), l'optique géométrique peut s'appliquer à condition que la surface ne diffuse pas la lumière. Une surface en verre poli est un exemple de surface non diffusante. Les lois de Descartes donnent le changement de direction d'un rayon par réflexion et par réfraction. Toute la théorie de l'optique géométrique peut être construite à partir des lois de Descartes. La figure suivante montre un rayon lumineux traversant deux dioptrés en suivant la loi de Descartes de la réfraction :



Le rayon part du point  $A$ , et rencontre les dioptrés en  $B$  et  $C$ . On arrête le rayon arbitrairement au point  $D$ . Sachant que la réfraction suit les lois de Descartes, on montre aisément que le rayon

inverse  $DCBA$  est correct. Cette propriété remarquable, appelée *principe du trajet inverse*, est très utile pour les calculs d'optique géométrique.

Le chemin optique le long d'un rayon est obtenu en multipliant la longueur par l'indice de réfraction. Le chemin optique pour ce rayon est donc :

$$[AD] = [AB] + [BC] + [CD] = n_1(AB) + n_2(BC) + n_3(CD) \quad (24)$$

Pour le rayon inverse, le chemin optique est opposé :

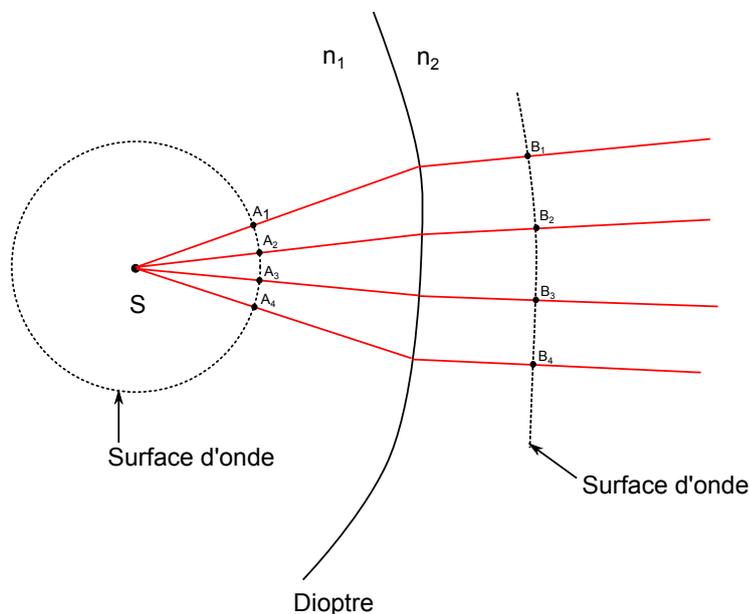
$$[AD] = -[DA] \quad (25)$$

D'un point de vue électromagnétique, les rayons lumineux sont des courbes indiquant la direction de propagation de l'énergie. Le vecteur de Poynting est donc tangent aux rayons lumineux.

### 2.c. Surfaces d'onde et théorème de Malus

Soit une source ponctuelle  $S$  émettant une lumière monochromatique. Les rayons émis par cette source dans un milieu homogène sont des demi-droites partant de  $S$ . Par définition, une surface d'onde se construit en reportant des chemins optiques égaux à partir du point source. On obtient ainsi une sphère de centre  $S$ . Les surfaces d'onde sphériques sont donc coupées perpendiculairement par les rayons. Sur la figure suivante, 4 rayons sont représentés. Les chemins optiques égaux sont :

$$[SA_1] = [SA_2] = [SA_3] = [SA_4] \quad (26)$$



Les rayons traversent le dioptré en suivant les lois de Descartes. Dans le milieu d'indice  $n_2$ , les surfaces d'onde se construisent en reportant les chemins optiques égaux depuis la source. Par exemple, pour les 4 rayons tracés :

$$[SB_1] = [SB_2] = [SB_3] = [SB_4] \quad (27)$$

En procédant de cette manière pour tout les rayons issus de la source, on définit une surface d'onde. En faisant varier le chemin optique, on définit toutes les surfaces d'onde. Il faut remarquer qu'en général les rayons dans le milieu d'indice  $n_2$  ne sont pas concourants.

**Théorème de Malus : les surfaces d'onde, construites en reportant depuis la source des chemins optiques égaux, sont coupées perpendiculairement par les rayons.**

Par exemple, la surface construite dans le milieu 2 sur la figure est perpendiculaire aux rayons aux points  $B_1, B_2, B_3, B_4$ . Le théorème s'applique bien sûr à un nombre quelconque de dioptries.

La démonstration du théorème de Malus peut se faire avec les lois de Descartes. D'un point de vue électromagnétique, on démontre à partir des équations de Maxwell, dans la limite des très faibles longueurs d'onde, que le vecteur de Poynting est orthogonal aux surfaces d'onde. Cependant, cette propriété n'est vérifiée que pour un milieu homogène *isotrope*.

Le déphasage de l'onde entre le point source et la surface d'onde constituée des points  $B_i$  s'exprime en fonction du chemin optique et de la longueur d'onde dans le vide :

$$\phi(B) - \phi(S) = \frac{2\pi}{\lambda_0} [SB_i] \quad (28)$$

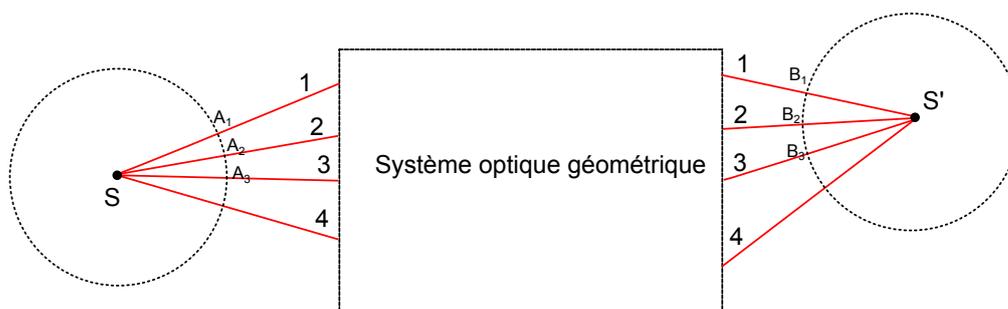
De même, on peut exprimer le déphasage entre les surfaces constituées des points  $A_i$  et  $B_i$  :

$$\phi(B) - \phi(A) = \frac{2\pi}{\lambda_0} [A_i B_i] \quad (29)$$

Cette dernière relation, qui donne la différence de phase entre deux points appartenant à deux surfaces d'onde, s'applique même si aucune source de lumière n'est présente au point  $S$ . En particulier, si le trajet de la lumière est inversé, les rayons construits proviennent d'une autre source de lumière et les rayons n'arrivent pas en  $S$  avec la même phase, mais la relation précédente reste valable.

## 2.d. Stigmatisme

Soit un système optique constitué d'un ensemble de dioptries. On dit que le système est stigmatique pour un point objet  $S$ , si tous les rayons issus de ce point sont concourants en un point image  $S'$  après la traversée du système.



Le miroir plan réalise le stigmatisme pour tous les points de l'espace. Les systèmes optiques à symétrie axiale (systèmes centrés) réalisent un stigmatisme approché pour des points proches de l'axe et des rayons peu inclinés par rapport à l'axe (rayons paraxiaux). Le stigmatisme approché sera traité comme le stigmatisme parfait.

Le stigmatisme permet la formation d'image des objets sur un plan. Par exemple, c'est grâce au stigmatisme que nous pouvons voir les objets autour de nous.

Les points  $S$  et  $S'$  sont *conjugués* par le système optique. En utilisant le principe du trajet inverse, on voit qu'une source placée en  $S'$  donnera une image en  $S$ . Les rayons sont identifiés par un numéro. Supposons qu'une source de lumière soit placée en  $S$ . Les surfaces d'onde dans le milieu (homogène) où se trouve cette source sont des sphères de centre  $S$ . D'après le théorème de Malus, les surfaces d'onde en sortie sont coupées perpendiculairement par les rayons. Or ces rayons se coupent au point  $S'$  donc les surfaces d'onde sont des sphères de centre  $S'$ . On en déduit l'égalité des chemins optiques suivants :

$$[A_1B_1] = [A_2B_2] = [A_3B_3] = \dots \quad (30)$$

On a par ailleurs :

$$[SA_1] = [SA_2] = [SA_3] = \dots \quad (31)$$

puisque toutes les distances sont égales. De même :

$$[B_1S'] = [B_2S'] = [B_3S'] = \dots \quad (32)$$

On en déduit le théorème suivant :

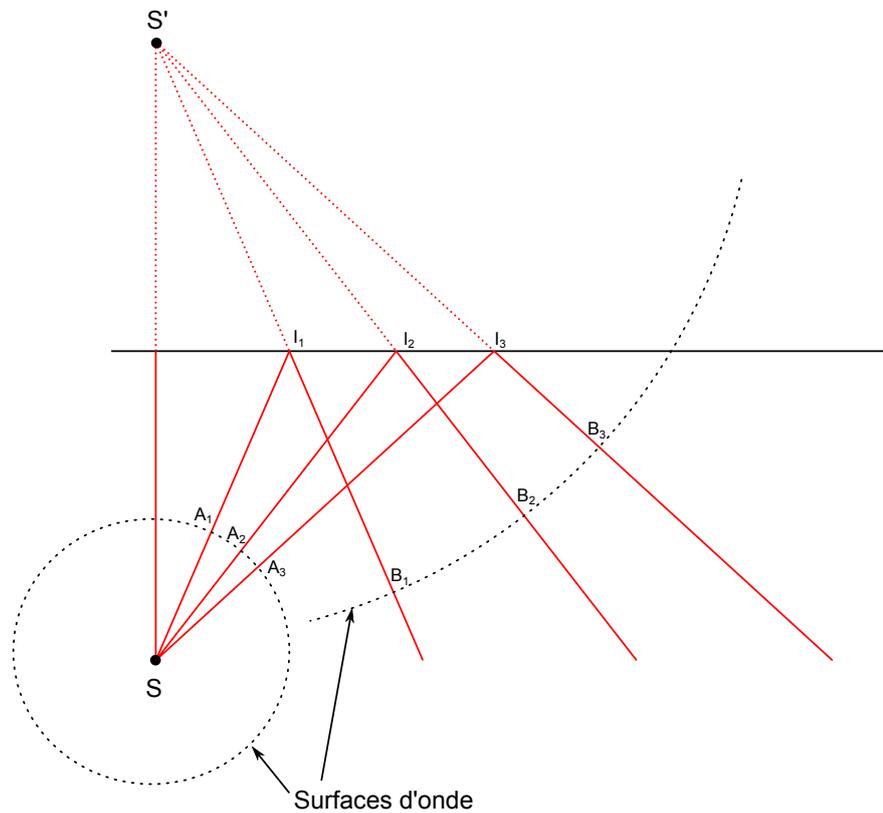
Le chemin optique entre deux points conjugués par un système stigmatique est le même pour tous les rayons :

$$[SS']_1 = [SS']_2 = [SS']_3 = \dots \quad (33)$$

## 2.e. Exemple : miroir plan

La surface plane d'une pièce en verre constitue un miroir plan si elle est polie. La profondeur des rugosités et le défaut de planéité ne doit pas dépasser  $\lambda/4$ . Si  $n$  désigne l'indice du verre, le coefficient de réflexion en incidence normale est  $R = 0,04$  pour  $n = 1,5$ . Il y a bien sûr aussi une onde transmise. Pour augmenter la réflectivité, on doit effectuer un traitement de la surface du verre, qui consiste à déposer une couche mince d'un matériau réfléchissant. Le plus utilisé est le dépôt d'une couche mince d'argent, qui donne une réflectivité de l'ordre de  $R = 0,99$ . En pratique, on considère que ce type de miroir réfléchit complètement la lumière.

La loi de Descartes de la réflexion permet de montrer que le miroir plan réalise le stigmatisme pour tout point de l'espace. La figure suivante montre le tracé de quelques rayons pour une source  $S$  réelle. L'image  $S'$  est virtuelle, car les rayons réfléchis sont virtuellement concourants. Les points conjugués  $S$  et  $S'$  sont symétriques par rapport au plan du miroir.



En sortie, les surfaces d'onde sont sphériques, centrées sur l'image  $S'$ . On a l'égalité des chemins optiques :

$$[SB_1] = [SB_2] = [SB_3] = \dots \quad (34)$$

On remarque que le plan du miroir n'est évidemment pas une surface d'onde, donc les points d'incidence  $I_i$  ne sont pas en phase. Pour un observateur recevant la lumière réfléchie, tout se passe comme si elle provenait d'une source virtuelle  $S'$ . On doit considérer le chemin optique depuis cette source virtuelle comme égal à celui depuis la source réelle

$$[S'B_i] = [SB_i] \quad (35)$$

On a donc nécessairement :

$$[SI_i] = [S'I_i] \quad (36)$$

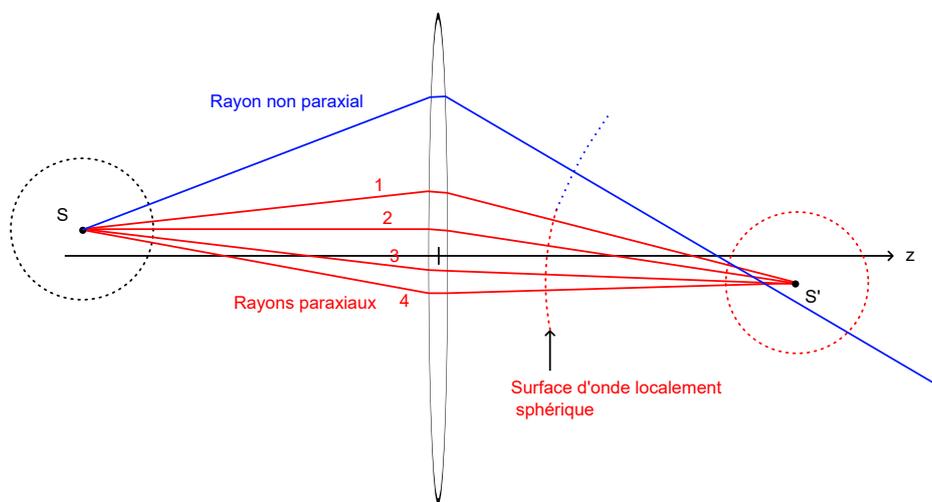
On voit aussi que les sources  $S$  et  $S'$  sont en phase. En réalité, la théorie géométrique ne tient pas compte d'un éventuel déphasage de l'onde réfléchie sur le plan du miroir. Par exemple, le rayon incident en  $I_1$  peut subir un déphasage lors de la réflexion. On peut citer l'exemple du conducteur parfait en incidence normale, où le champ électrique subit un déphasage de  $\pi$  à la réflexion. De manière générale, le déphasage est proche de  $\pi$  lorsque l'angle d'incidence est

faible. Même si les sources  $S$  et  $S'$  ne sont pas en phase, leur déphasage reste constant dans le temps. On dit que les deux sources sont *cohérentes*. Cette propriété est très importante : le miroir plan constitue un moyen simple de créer une source (virtuelle) cohérente avec une source réelle.

## 2.f. Exemple : lentille convergente

La simulation [Système optique axial](#) permet de tracer les rayons issus d'une source ponctuelle traversant une lentille biconvexe.

Lorsque l'angle d'ouverture du faisceau de lumière issu de la source est grand, les surfaces d'onde en sortie (qui sont coupées perpendiculairement par les rayons) ne sont pas sphériques. Autrement dit, les rayons ne sont pas concourants. Si la lentille est utilisée dans les conditions de Gauss, l'ouverture du faisceau est faible et les surfaces d'onde en sortie sont très proches de surfaces sphériques concentriques. Le centre de ces sphères est l'image  $S'$  de la source  $S$ .



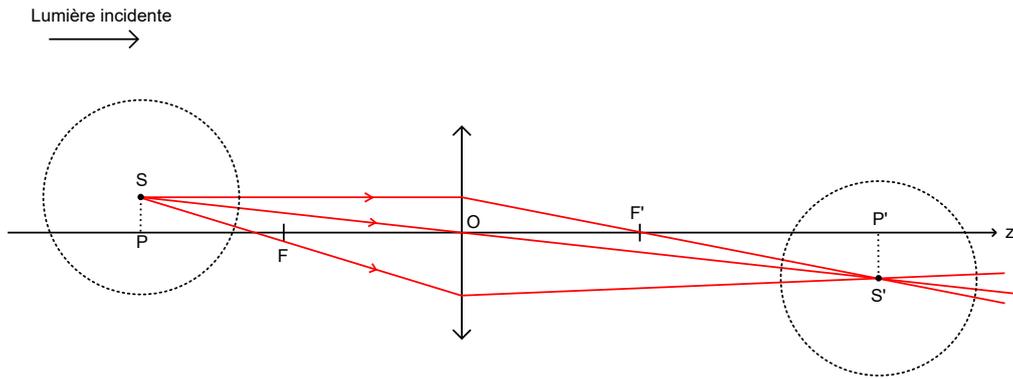
Un système optique centré utilisé dans les conditions de Gauss sera traité comme un système stigmatique parfait. On écrira donc l'égalité des chemins optiques pour les différents rayons allant de  $S$  à  $S'$  :

$$[SS']_1 = [SS']_2 = [SS']_3 = \dots \quad (37)$$

Cette propriété sera utilisée pour calculer les chemins optiques de rayons qui traversent une lentille. On remarque que l'épaisseur de verre traversée par les différents rayons ne peut être calculée simplement. Il est donc impossible de calculer le chemin optique de manière directe (mais les programmes informatiques de tracé de rayons le font).

Une lentille est dite *mince* lorsque son épaisseur est très petite par rapport à la distance des points  $S$  et  $S'$ . La lentille mince possède une relation de conjugaison simple. Il faut faire attention au fait que l'épaisseur de la lentille n'est jamais négligeable dans les calculs de chemin optique. La seule règle à utiliser pour ces calculs est l'égalité des chemins optiques pour tous les rayons allant d'un point objet à un point image.

Considérons une lentille mince convergente et deux points conjugués situés à une distance finie. Le foyer objet  $F$  se trouve du côté de la lumière incidente, à gauche sur la figure. Le foyer image  $F'$  se trouve du côté de la sortie, symétriquement par rapport au centre  $O$  de la lentille.



En considérant les projections  $P$  et  $P'$  sur l'axe de la lentille, la relation de conjugaison s'écrit :

$$\frac{1}{OP'} - \frac{1}{OP} = \frac{1}{OF'} \quad (38)$$

Si la source ponctuelle  $S$  émet de manière isotrope (de manière égale dans toutes les directions), l'onde sphérique du côté objet s'écrit :

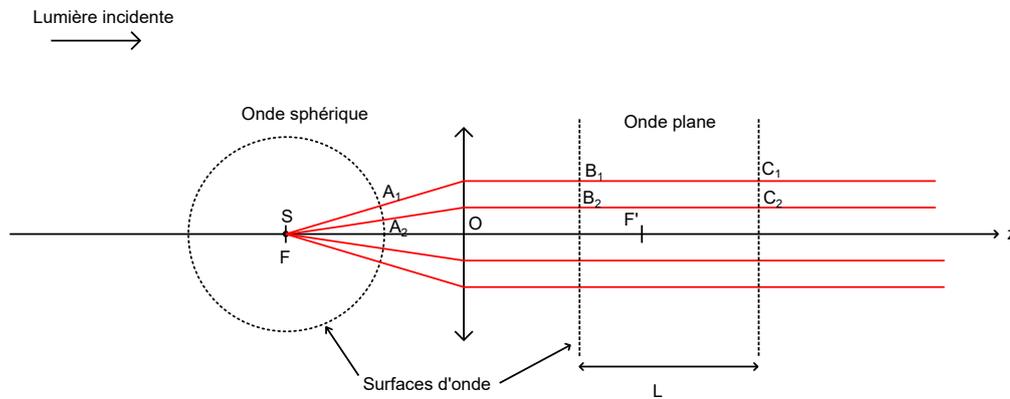
$$a(r, t) = \frac{\alpha}{r} \cos(kr - \omega t) \quad (39)$$

où  $r = SM$  est la distance à la source. Du côté image, l'onde sphérique converge vers le point  $S'$  à gauche de celle-ci :

$$a'(r', t) = \frac{\alpha}{r'} \cos(-kr - \omega t) \quad (40)$$

avec  $r' = S'M$ . Une fois passé le point  $S'$ , on retrouve une onde sphérique divergente. Pour un observateur (ou un appareil de mesure) situé à droite de  $S'$ , tout se passe comme si la lumière venait d'une source ponctuelle  $S'$ . Il s'agit d'une source de lumière secondaire, cohérente avec la source de lumière primaire  $S$ , en raison de l'égalité des chemins optiques des rayons allant de  $S$  à  $S'$ .

Un cas particulier important est celui d'une source  $S$  placée sur le foyer objet de la lentille. Dans ce cas, les surfaces d'onde en sortie sont des plans perpendiculaires aux rayons parallèles. L'onde en sortie est donc une onde plane. En réalité, il s'agit d'une approximation d'une onde plane, d'une part à cause de l'approximation du stigmatisme, d'autre part à cause de l'approximation de l'optique géométrique.



Les chemins optiques se calculent en utilisant l'égalité :

$$[A_1B_1] = [A_2B_2] = \dots \quad (41)$$

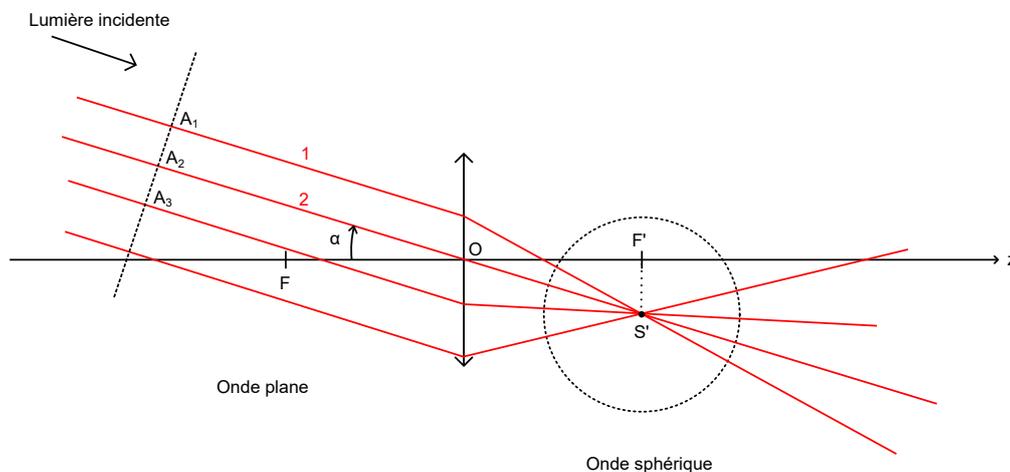
ou bien :

$$[SB_1] = [SB_2] = \dots \quad (42)$$

Le déphasage entre deux plans d'onde peut se calculer directement. Si  $n$  est l'indice du milieu :

$$\phi(C) - \phi(B) = \frac{2\pi}{\lambda_0} nL \quad (43)$$

Inversement, une lentille convergente peut transformer une onde plane en onde sphérique. Considérons une onde plane arrivant sur une lentille. Une onde plane provient d'une source située très loin (en principe à l'infini). Elle est définie par un angle  $\alpha$  par rapport à l'axe de la lentille.



L'image est située dans le plan image, à une distance du foyer (l'angle est très petit) :

$$F'S' = f'\alpha \quad (44)$$

On a l'égalité des chemins optiques suivants :

$$[A_1S'] = [A_2S'] = [A_3S'] = \dots \quad (45)$$

Considérons un problème différent : deux rayons incidents parallèles (1) et (2) sont réfractés par une lentille convergente mais ne sont pas nécessairement en phase aux points  $A_1$  et  $A_2$  :

$$\phi(A_2) \neq \phi(A_1) \quad (46)$$

Ces deux rayons se coupent bien sûr en  $S'$ . L'égalité des chemins optiques suivante reste valable :

$$[A_1S'] = [A_2S'] \quad (47)$$

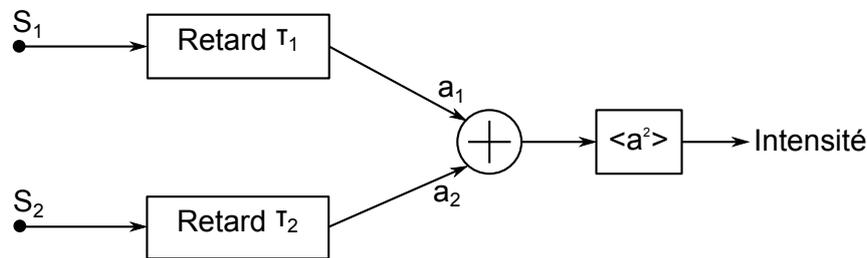
On en déduit que les deux rayons arrivent en  $S'$  avec un déphasage égal au déphasage qu'ils avaient sur les deux points  $A_1$  et  $A_2$ . Dans cette situation, il n'y a pas d'onde plane en entrée ni d'onde sphérique en sortie. Le déphasage des rayons au point d'intersection  $S'$  est :

$$\phi(S')_1 - \phi(S')_2 = \phi(A'_1) - \phi(A'_2) \quad (48)$$

### 3. Interférence de deux ondes

#### 3.a. Superposition de deux ondes quasi monochromatiques

On considère deux sources ponctuelles quasi monochromatiques  $S_1$  et  $S_2$ , de fréquences *a priori* différentes. Les ondes issues de ces deux sources parviennent en un point  $M$  de l'espace avec un temps de propagation noté  $\tau_1$  pour la première,  $\tau_2$  pour la seconde. Ce retard peut venir d'une simple propagation dans un milieu homogène, ou d'un dispositif optique plus complexe. Au point  $M$ , les fonctions d'onde s'ajoutent. La grandeur mesurable en ce point est l'intensité, égale à la moyenne temporelle du carré de la fonction d'onde. Le système complet peut être décrit par le schéma bloc suivant :



L'onde provenant de la première source s'écrit au point  $M$  :

$$a_1(t) = A_1 \cos(2\pi f_1(t - \tau_1) + \psi_1(t - \tau_1)) \quad (49)$$

La fonction  $\psi_1(t)$  permet de modéliser le caractère quasi monochromatique de l'onde. Il s'agit d'une phase constante par morceaux, qui change de valeur aléatoirement avec une période égale au temps de cohérence  $\Delta t$ . Cette fonction est une propriété de la source, indépendante du dispositif optique qui introduit le retard.

Lorsque seule cette onde est présente, l'intensité au point  $M$  est :

$$I_1 = \frac{1}{2} A_1^2 \quad (50)$$

On définit de même l'onde au point  $M$  provenant de la seconde source :

$$a_2(t) = A_2 \cos(2\pi f_2(t - \tau_2) + \psi_2(t - \tau_2)) \quad (51)$$

La fonction d'onde résultante au point  $M$  est la somme :

$$a(t) = a_1(t) + a_2(t) \quad (52)$$

L'intensité est la moyenne temporelle du carré de la fonction d'onde :

$$I = I_1 + I_2 \quad (53)$$

$$+ A_1 A_2 \langle \cos(2\pi(f_1 + f_2)t - 2\pi(f_1\tau_1 + f_2\tau_2) + \psi_1(t - \tau_1) + \psi_2(t - \tau_2)) \rangle \quad (54)$$

$$+ A_1 A_2 \langle \cos(2\pi(f_1 - f_2)t - 2\pi(f_1\tau_1 - f_2\tau_2) + \psi_1(t - \tau_1) - \psi_2(t - \tau_2)) \rangle \quad (55)$$

Le second terme est nul en raison de la très grande valeur de la fréquence  $f_1 + f_2$  par rapport à l'inverse du temps de réponse des capteurs. Le dernier terme est le *terme d'interférence* :

$$I_{12} = 2\sqrt{I_1 I_2} \langle \cos(2\pi(f_1 - f_2)t - 2\pi(f_1\tau_1 - f_2\tau_2) + \psi_1(t - \tau_1) - \psi_2(t - \tau_2)) \rangle \quad (56)$$

Soit  $\tau_r$  un temps de l'ordre du temps de réponse du capteur (supérieur à une microseconde). La moyenne s'écrit :

$$I_{12} = 2\sqrt{I_1 I_2} \frac{1}{\tau_r} \int_0^{\tau_r} \cos(2\pi(f_1 - f_2)t - 2\pi(f_1\tau_1 - f_2\tau_2) + \psi_1(t - \tau_1) - \psi_2(t - \tau_2)) dt \quad (57)$$

On dit qu'il y a *interférence* si  $I_{12}$  est non nul.

### 3.b. Conditions d'interférence

Lorsque les fréquences sont différentes, la différence de fréquence  $f_1 - f_2$  est généralement très grande par rapport au temps de réponse du capteur et le terme d'interférence est nul. On en tire une première conclusion :

Deux ondes de fréquences différentes n'interfèrent pas.

Une exception à cette règle est l'interférence qui peut être observée avec deux lasers ayant un très grand temps de cohérence et ayant des fréquences dont la différence est inférieure à l'inverse du temps de réponse du capteur, soit une différence inférieure à 1 MHz, ce qui est très faible et très difficile à réaliser. Dans les cas courants, la règle s'applique.

On a donc :

$$I_{12} = 2\sqrt{I_1 I_2} \frac{1}{\tau_r} \int_0^{\tau_r} \cos(2\pi f(\tau_2 - \tau_1) + \psi_1(t - \tau_1) - \psi_2(t - \tau_2)) dt \quad (58)$$

Lorsque les phases  $\psi_1$  et  $\psi_2$  varient aléatoirement de manière indépendante, on dit qu'elles sont non corrélées. Dans ce cas, les deux ondes sont *incohérentes*. Comme cette propriété vient des sources, on dit que les deux sources sont *incohérentes*. La différence  $\psi_1 - \psi_2$  varie aléatoirement avec une période de l'ordre du temps de cohérence, beaucoup plus petite que le temps de réponse des capteurs (pour les sources ordinaires). Le résultat est une moyenne nulle.

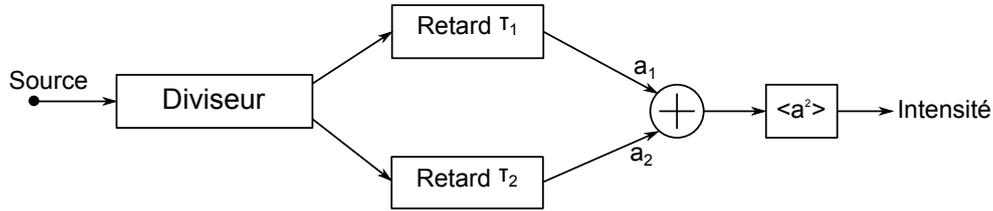
Deux ondes issues de deux sources incohérentes n'interfèrent pas.

Pour qu'il y ait des interférences, il faut que les deux sources soient cohérentes, c'est-à-dire que leurs phases aléatoires soient égales à une constante près :

$$\psi_1(t) - \psi_2(t) = \psi_0 \quad (59)$$

Deux sources cohérentes ont donc entre elles un déphasage constant ( $\psi_0$ ). Si ce déphasage est nul, les deux sources sont *synchrones*.

En pratique, une manière simple d'obtenir deux sources cohérentes est de partir d'une seule source physique ponctuelle et d'utiliser un dispositif optique *diviseur d'onde*, qui génère deux ondes à partir d'une seule. Voici alors le nouveau schéma bloc :



On a donc :

$$I_{12} = 2\sqrt{I_1 I_2} \frac{1}{\tau_r} \int_0^{\tau_r} \cos(2\pi f(\tau_2 - \tau_1) + \psi(t - \tau_1) - \psi(t - \tau_2) + \psi_0) dt \quad (60)$$

La phase aléatoire  $\psi(t) = \psi_1(t)$  est en fait une propriété de la source quasi monochromatique  $S$ .

On introduit le retard de l'onde 1 par rapport à l'onde 2 au point considéré :

$$\tau = \tau_2 - \tau_1 \quad (61)$$

Après un changement d'origine du temps sur la fonction  $\psi(t)$ , le terme d'interférence s'écrit :

$$I_{12}(\tau) = 2\sqrt{I_1 I_2} \frac{1}{\tau_r} \int_0^{\tau_r} \cos(2\pi f\tau + \psi(t) - \psi(t - \tau) + \psi_0) dt \quad (62)$$

Le tracé du terme d'interférence en fonction du retard peut être obtenu par une [simulation](#). Celle-ci montre que le terme d'interférence est nul lorsque le retard est grand devant le temps de cohérence.

Lorsque le retard des deux ondes au point considéré est grand devant le temps de cohérence, les deux ondes ne sont pas cohérentes en ce point et n'interfèrent pas.

On se place à présent dans le cas où le retard est faible par rapport au temps de cohérence :

$$\tau \ll \Delta t \quad (63)$$

La moyenne devient alors :

$$I_{12} = 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(2\pi f\tau + \psi_0) \quad (64)$$

Il est d'usage d'utiliser plutôt le déphasage entre les deux ondes au point  $M$  :

$$\Phi = 2\pi f\tau + \psi_0 \quad (65)$$

Ce déphasage comporte une partie due aux différences de chemin depuis les deux sources cohérentes, une autre due à la différence de phase des deux sources.

Lorsque les conditions d'interférence sont réunies, on obtient pour l'intensité au point  $M$  l'expression suivante :

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \Phi \quad (66)$$

C'est la formule de Fresnel, du nom du physicien français (1788-1827) qui a grandement contribué à la théorie des interférences et de la diffraction.

La formule de Fresnel est valable si :

- ▷ les deux sources sont cohérentes ;
- ▷ le retard est petit par rapport au temps de cohérence.

En pratique, la première condition est réalisée en utilisant une seule source ponctuelle physique, dont l'onde est divisée, ce qui a pour conséquence l'égalité des fréquences. Si la seconde condition n'est pas remplie, mais si le retard n'est pas grand par rapport au temps de cohérence, c'est-à-dire s'il est du même ordre de grandeur, alors il y a encore interférence mais la formule de Fresnel n'est plus valable.

Pour décrire les phénomènes d'interférence, on introduit la *différence de marche*, définie comme la différence des chemins optiques depuis les deux sources cohérentes :

$$\delta' = [S_1M] - [S_2M] \quad (67)$$

Le déphasage s'écrit alors :

$$\Phi = \frac{2\pi}{\lambda_0} \delta' + \psi_0 \quad (68)$$

Cette expression peut être encore simplifiée en définissant la différence de marche depuis la source  $S$  :

$$\delta = [SM]_1 - [SM]_2 \quad (69)$$

ce qui conduit à

$$\Phi = \frac{2\pi}{\lambda_0} \delta \quad (70)$$

### 3.c. Cohérences temporelle et spatiale

La cohérence temporelle d'une source ponctuelle est liée à son temps de cohérence. Plus celui-ci est grand, plus la cohérence temporelle est grande. À la limite théorique d'un temps de cohérence infini, la cohérence temporelle est complète (onde parfaitement monochromatique). Inversement, une onde polychromatique possède une cohérence temporelle très faible. Entre les deux se situe l'onde quasi monochromatique, dont le temps de cohérence est de l'ordre du dixième de nanoseconde pour les raies des lampes spectrales.

La cohérence spatiale est la cohérence de deux points sources distincts. Considérons deux points différents du tube d'une lampe spectrale, dont on a isolé une raie quasi monochromatique. Ces deux points  $S_a$  et  $S_b$  sont incohérents, au sens donné plus haut. Les deux ondes issues de ces deux points n'interfèrent pas.

Deux ondes issues de deux points différents d'une lampe n'interfèrent pas :

$$I = I_a + I_b \quad (71)$$

Les lasers sont des sources très différentes des lampes spectrales, car la lumière émise possède généralement une *cohérence spatiale*.

Deux points différents d'un faisceau laser sont cohérents (ou partiellement cohérents).

Bien que les lasers soient souvent utilisés dans les expériences d'optique, les calculs d'interférence avec des sources lasers sortent du cadre de ce cours. On admettra qu'un laser se comporte approximativement comme une source ponctuelle, en raison de sa cohérence spatiale.

Pour réaliser une source assimilable à une source ponctuelle avec une lampe spectrale, on place une ouverture très petite sur un écran placé juste devant la lampe. La diffraction opérée par cette ouverture fournit une source que l'on peut considérer comme ponctuelle, bien que son émission ne soit pas du tout isotrope.

Cette méthode a l'inconvénient de donner un flux lumineux très faible, à moins d'employer une lampe très puissante (comme une lampe à arc). L'usage d'un laser permet d'avoir une grande puissance lumineuse tout en gardant la cohérence spatiale.

### 3.d. Franges d'interférences

Les variations de la différence de marche  $\delta$  d'un point à l'autre de l'espace donnent lieu à une variation de l'intensité qui constitue des *franges d'interférence*.

On définit l'*ordre d'interférence*, noté  $p$ , par la relation :

$$\Phi = 2\pi p \quad (72)$$

La différence de marche s'écrit :

$$\delta = p\lambda_0 \quad (73)$$

Les interférences sont constructives lorsque l'intensité est maximale, c'est-à-dire lorsque l'ordre d'interférence est un nombre entier.

La formule de Fresnel donne l'intensité maximale pour une interférence constructive :

$$I_{max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} = (\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2})^2 \quad (74)$$

Les interférences sont destructives lorsque  $p$  est égal à un nombre entier plus 1/2. L'intensité est alors minimale :

$$I_{min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} = (\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2})^2 \quad (75)$$

Cette intensité minimale est nulle lorsque les deux ondes ont la même intensité au point considéré. La plupart des expériences d'interférence réalise cette condition, au moins approximativement. La formule de Fresnel se simplifie alors :

$$I = 2I_1(1 + \cos \Phi) \quad (76)$$

La valeur maximale est égale à quatre fois l'intensité de chaque onde. Voici le tracé de la courbe d'intensité en fonction du rapport  $\delta/\lambda$  pour différentes valeurs du rapport  $I_2/I_1$ . L'intensité est divisée par la valeur maximale.

```
from matplotlib.pyplot import *
import numpy
```

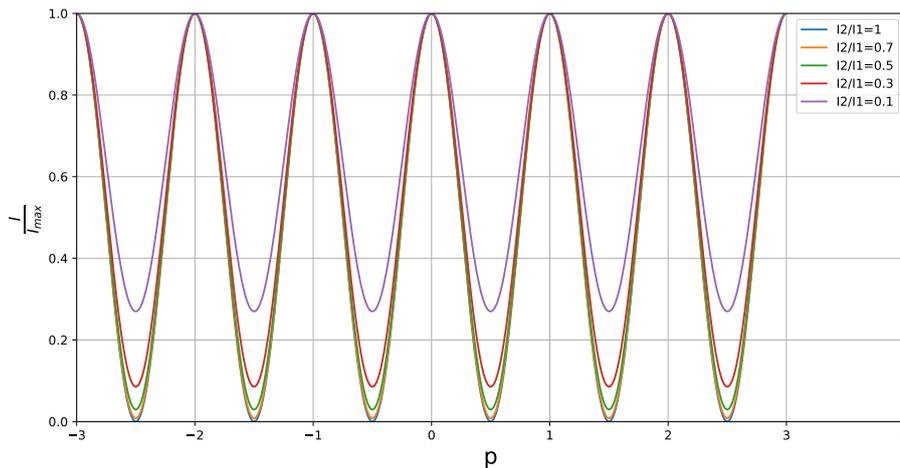
```

import math

def intensite(I1,I2,p):
    a = 2*math.sqrt(I1*I2)
    return (I1+I2+a*numpy.cos(2*math.pi*p))/(I1+I2+a)

p=numpy.linspace(-3,3,500)
figure(figsize=(12,6))
plot(p,intensite(1.0,1.0,p),label='I2/I1=1')
plot(p,intensite(1.0,0.7,p),label='I2/I1=0.7')
plot(p,intensite(1.0,0.5,p),label='I2/I1=0.5')
plot(p,intensite(1.0,0.3,p),label='I2/I1=0.3')
plot(p,intensite(1.0,0.1,p),label='I2/I1=0.1')
xlabel('p',fontsize=18)
ylabel(r'$\frac{I}{I_{max}}$',fontsize=18)
axis([-3,4,0,1])
legend(loc='upper right')
grid()

```



L'intensité des interférences destructives est très faible (en valeur relative) tant que le rapport des intensités est supérieur à 1/2. Dans ce cas, les franges d'interférence destructives sont vues noires. On en conclut que la formule simplifiée (76) est une très bonne approximation tant que les deux intensités ne sont pas très différentes.

Les interférences sont d'autant plus visibles que l'intensité des interférences destructives est faible par rapport à celle des interférences constructives. La visibilité peut être quantifiée par le *facteur de contraste* (ou facteur de visibilité) défini par :

$$C = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2} = \frac{2\sqrt{r}}{1 + r} \quad (77)$$

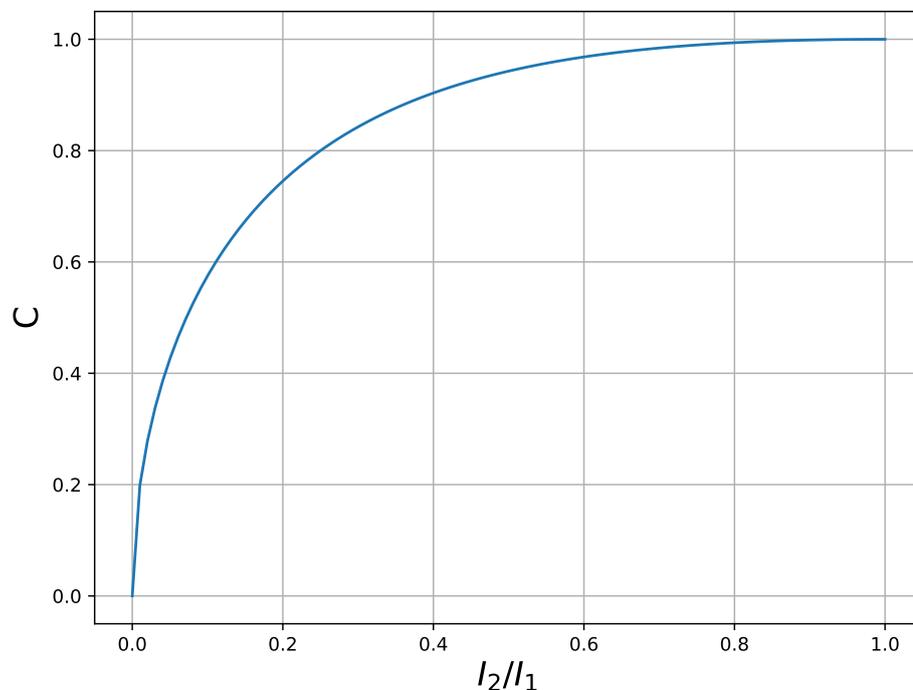
où  $r$  est le rapport des intensités. Lorsque le contraste est nul, il n'y a pas d'interférences. Sa valeur maximale est 1, lorsque les deux intensités sont égales. Rappelons que la formule de Fresnel n'est valable que si le retard est petit devant le temps de cohérence, c'est-à-dire si la différence de marche est petite par rapport à la longueur de cohérence :

$$\delta \ll \Delta l \quad (78)$$

Lorsque cette condition n'est pas vérifiée, il y a une baisse du contraste, jusqu'à annulation lorsque la différence de marche est grande devant la longueur de cohérence.

Voici la courbe du contraste en fonction du rapport des intensités :

```
r = numpy.linspace(0,1,100)
figure(figsize=(8,6))
plot(r,2*numpy.sqrt(r)/(1.0+r))
xlabel(r"$I_2/I_1$", fontsize=18)
ylabel("C", fontsize=18)
grid()
```



En pratique, un contraste supérieur à 0,9 est très satisfaisant. La formule (76) peut être utilisée dans ce cas.

## 4. Interférence de deux ondes sphériques

### 4.a. Définition

De nombreux dispositifs d'interférence se ramènent au problème des interférences produites par deux sources ponctuelles. Comme nous l'avons vu plus haut, des interférences sont observées si ces deux sources sont *cohérentes*. Deux sources sont cohérentes si leur différence de phase est constante. En pratique, cela impose d'obtenir ces deux sources à partir d'une seule, par division de l'onde. Pour simplifier, on suppose que le déphasage entre les deux sources est nul : elles sont *synchrones*.

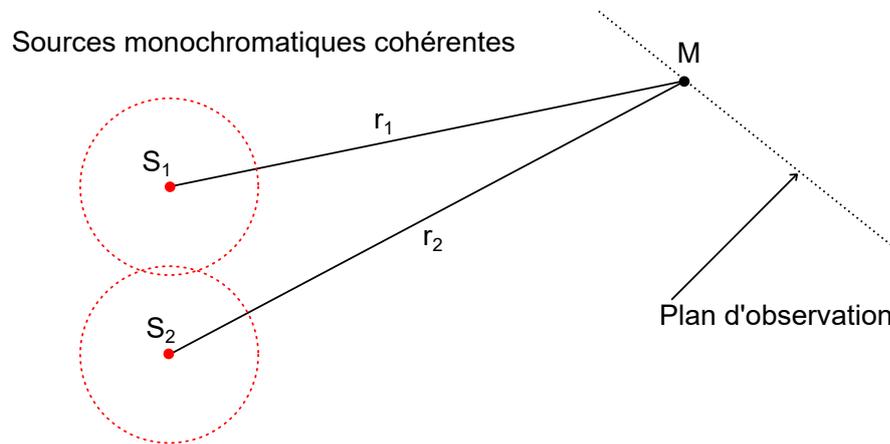
Les deux sources rayonnent dans un milieu homogène, d'indice de réfraction  $n$ . On suppose qu'elles ont la même puissance. Soit  $M$  un point quelconque de l'espace. On introduit

les distances  $r_1 = S_1M$  et  $r_2 = S_2M$ . On suppose que la différence de marche est très petite par rapport à la longueur de cohérence, ce qui permet de considérer l'onde comme parfaitement monochromatique. En utilisant les amplitudes complexes, les deux ondes sphériques s'écrivent :

$$\underline{A}_1(r_1) = \frac{\alpha}{r_1} e^{i \frac{2\pi}{\lambda_0} n r_1} \quad (79)$$

$$\underline{A}_2(r_2) = \frac{\alpha}{r_2} e^{i \frac{2\pi}{\lambda_0} n r_2} \quad (80)$$

Dans un milieu homogène, les lois de l'optique géométrique sont parfaitement valables. On peut donc décrire la situation en terme de rayons lumineux. La figure suivante montre le rayon provenant de chacune des deux sources et parvenant au point  $M$  :



On peut considérer que les deux rayons interfèrent au point  $M$ . La différence de phase en ce point est :

$$\Phi(M) = \frac{2\pi}{\lambda_0} n (r_1 - r_2) = \frac{2\pi}{\lambda} (r_1 - r_2) \quad (81)$$

La différence de marche est :

$$\delta = n(r_1 - r_2) \quad (82)$$

Le déplacement du point  $M$  dans l'espace fait varier cette différence. On suppose que les deux sources sont assez proches l'une de l'autre, et le point  $M$  assez éloigné des sources, pour que la différence de marche soit très petite par rapport à la longueur de cohérence, ce qui permet d'utiliser la formule de Fresnel.

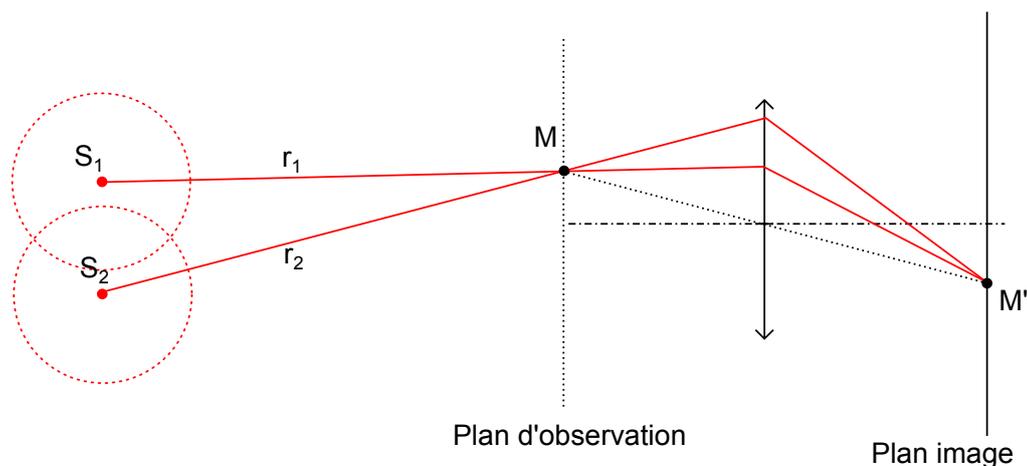
Les deux distances étant très voisines, on peut utiliser l'approximation suivante :

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha}{r_1} \right)^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha}{r_2} \right)^2 \quad (83)$$

Même si les intensités ne sont pas tout à fait égales, on a vu plus haut que les interférences observées auront un bon contraste. Supposer que les intensités sont égales est donc une hypothèse très peu contraignante.

La différence de phase est très sensible au déplacement du point  $M$ , car une variation de  $\delta$  de l'ordre de la longueur d'onde conduit à une variation importante de la différence de phase.

Les interférences s'observent sur un plan. Pour l'observation visuelle, on peut utiliser un écran blanc diffusant, qui permet de percevoir qualitativement l'éclairement du plan donc de voir les interférences. La photographie des interférences peut se faire en plaçant le capteur CCD directement sur le plan d'observation. Pour agrandir les interférences, on peut être amené à utiliser un système optique qui effectue l'image du plan d'observation sur le capteur. Considérons le point  $M'$  conjugué du point  $M$  par l'instrument d'optique, par exemple une lentille convergente utilisée dans les conditions de Gauss :



La différence de chemin optique entre les deux points conjugués est nulle :

$$[MM']_1 = [MM']_2 \quad (84)$$

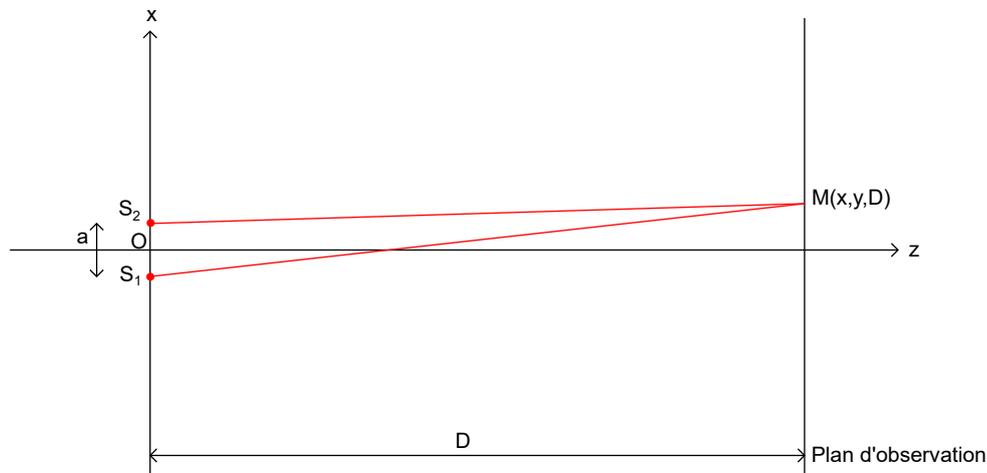
La différence de marche au point  $M'$  est donc identique à celle en son point conjugué :

$$\delta(M') = \delta(M) = n(r_1 - r_2) \quad (85)$$

Les interférences observées sur le plan image sont identiques à celles qui seraient vues sur le plan objet, à un facteur de grandissement près. L'utilisation d'un instrument d'optique grossissant permet de voir des franges d'interférence trop petites pour être discernées à l'œil nu.

#### 4.b. Franges rectilignes

Considérons le cas d'un plan d'observation placé parallèlement à la droite joignant les deux sources, à une distance  $D$  très grande par rapport à la distance  $a = S_1S_2$  entre les deux sources. Le repère cartésien utilisé pour les calculs est défini sur la figure suivante :



L'origine  $O$  du repère est le milieu des deux points source. La droite  $Oz$  est perpendiculaire au plan d'observation. Les deux sources sont sur la droite  $Ox$ . La différence de marche en un point  $M(x, y, D)$  de l'écran se calcule aisément avec ses coordonnées cartésiennes :

$$\delta = n\sqrt{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + D^2} - n\sqrt{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + D^2} \quad (86)$$

Voici la figure d'interférence obtenue. L'échelle de longueur est le millimètre.

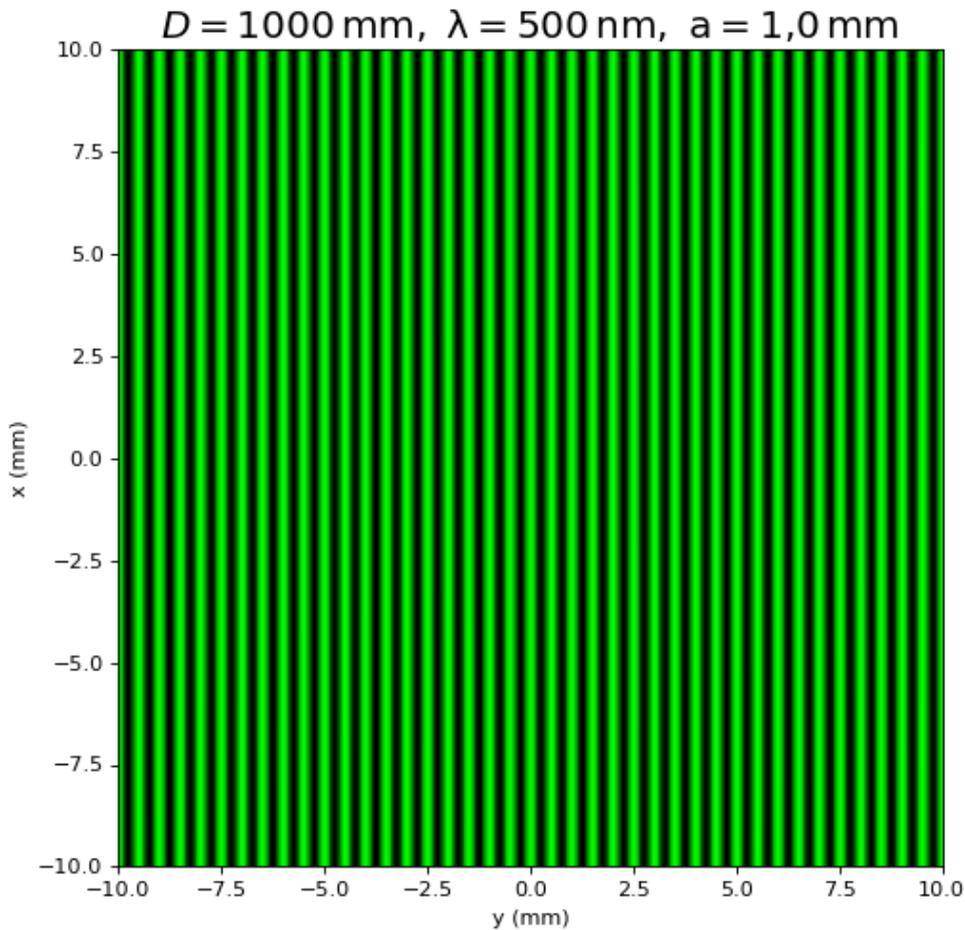
```

D = 1000.0
Lambda=0.5e-3
a = 1.0
L = 10.0

def phi(x,y):
    u2 = y**2+D**2
    delta = numpy.sqrt((x+a/2)**2+u2)-numpy.sqrt((x-a/2)**2+u2)
    return 2*math.pi/Lambda*delta

dL = L/500
x,y = numpy.mgrid[-L:L:dL,-L:L:dL]
I = 2*(1.0+numpy.cos(phi(x,y)))
I=I.T/4
(M,N) = I.shape
image = numpy.zeros((M,N,3))
image[:, :, 0] = I*0
image[:, :, 1] = I
image[:, :, 2] = I*0
figure(figsize=(7,7))
imshow(image,extent=[-L,L,-L,L])
xlabel('y (mm)')
ylabel('x (mm)')
title(r"$D=1000\$, \rm{mm}\$, \ \lambda=500\$, \rm{nm}\$, \ a=1\{,\}0\$, \rm{mm}\$", fontsize=18)

```



La perception visuelle des franges d'interférences (sur un écran ou par observation directe) est assez voisine de ce que l'on voit sur cette figure : nous percevons des bandes claires et sombres dont les bords sont flous, mais nous ne percevons pas vraiment la variation sinusoïdale de l'éclairement. On voit que les franges d'interférence sont rectilignes. Cela est dû au fait que la largeur de la zone observée et la distance entre les sources sont très petites par rapport à la distance  $D$ . Un développement limité à l'ordre 1 conduit en effet à :

$$\delta = n \frac{xa}{D} \quad (87)$$

Cette expression approchée de la différence de marche est indépendante de  $y$  (alors que l'expression exacte en dépend). Elle montre que les franges sont rectilignes, parallèles à l'axe  $Y$ , c'est-à-dire perpendiculaires à la droite joignant les deux sources. La frange constructive d'ordre  $p$  (nombre entier) se trouve à l'abscisse :

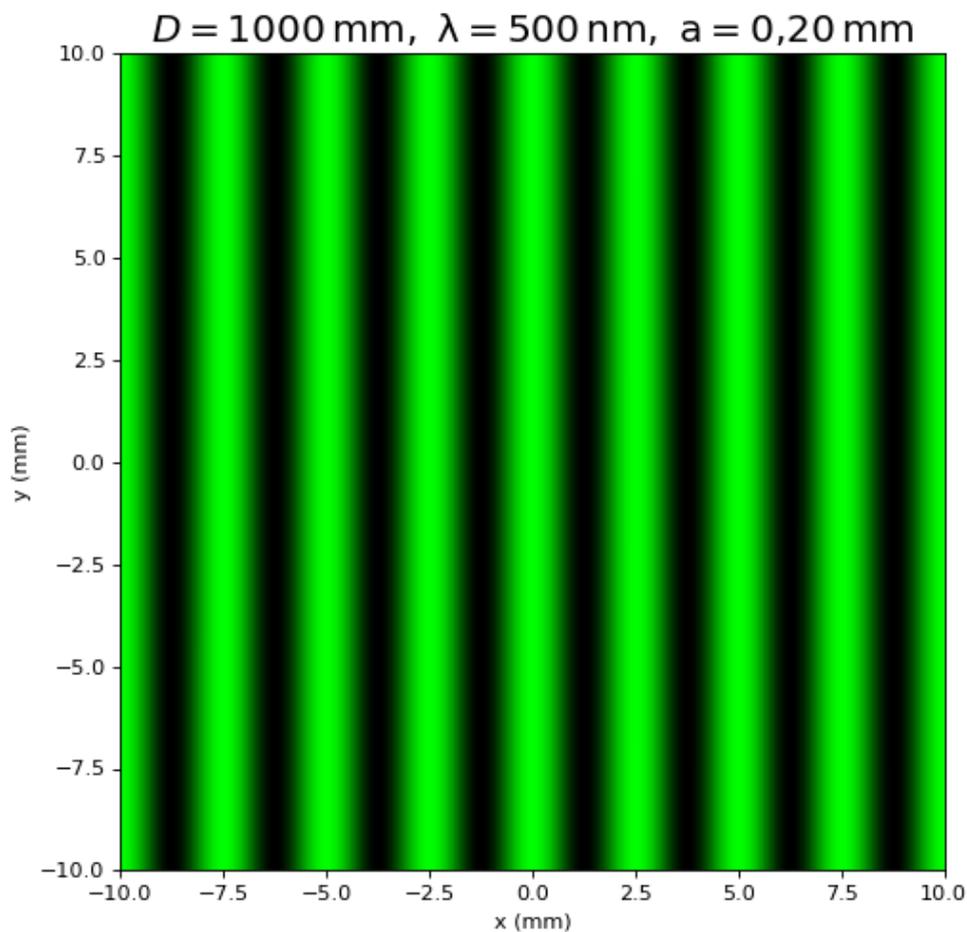
$$x_p = p \frac{D\lambda}{a} \quad (88)$$

On en déduit l'espacement entre deux franges consécutives, appelé *interfrange* :

$$i = \frac{D\lambda}{a} \quad (89)$$

Lorsque la distance entre les deux sources diminue (ou lorsqu'on éloigne le plan d'observation), l'interfrange augmente. Voici la figure d'interférence pour une distance entre les sources plus petite :

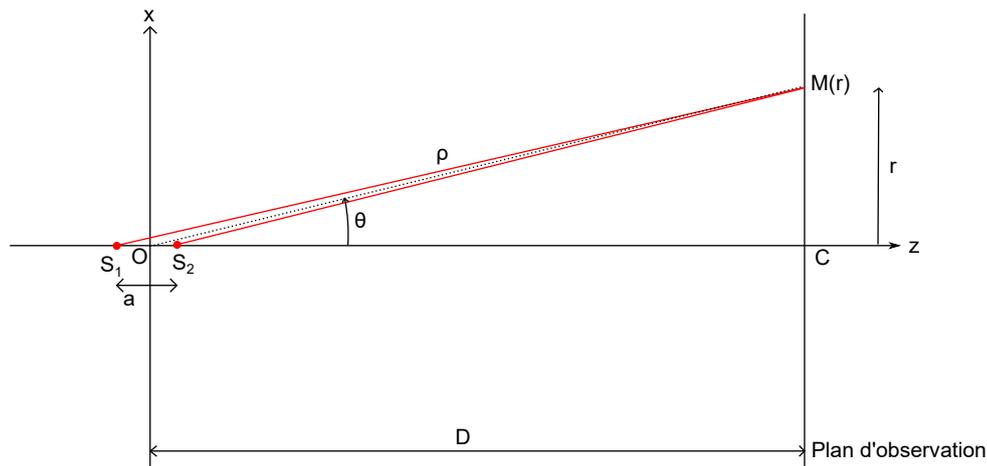
```
D = 1000.0
Lambda=0.5e-3
a = 0.2
L = 10.0
dL = L/500
x,y = numpy.mgrid[-L:L:dL,-L:L:dL]
I = 2*(1.0+numpy.cos(phi(x,y)))
I=I.T/4
(M,N) = I.shape
image = numpy.zeros((M,N,3))
image[:, :, 0] = I*0
image[:, :, 1] = I
image[:, :, 2] = I*0
figure(figsize=(7,7))
imshow(image,extent=[-L,L,-L,L])
ylabel('y (mm)')
xlabel('x (mm)')
title(r"$D=1000\$, \rm{mm}\$, \ \lambda=500\$, \rm{nm}\$, \ a=0\{,\}20\$, \rm{mm}\$", fontsize=18)
```



La simulation [Interférences avec deux sources ponctuelles](#) permet de faire varier toutes les constantes.

#### 4.c. Franges en anneaux

On étudie une autre position de l'écran, perpendiculaire à la droite joignant les deux sources. L'axe  $Oz$  est toujours perpendiculaire à l'écran.



La forme des franges d'interférence se déduit directement de la symétrie axiale du dispositif. En effet, la différence de marche  $\delta = r_1 - r_2$  est invariante par rotation du point  $M$  autour du point  $C$ , intersection de la droite  $S_1S_2$  avec le plan d'observation. Les lignes d'égale valeur de  $\delta$  sur le plan d'observation sont donc des cercles de centre  $C$ . Les franges d'interférence observées sont des *anneaux* de centre  $C$ . Pour calculer la différence de marche en coordonnées cartésiennes, il suffit de placer les deux sources sur l'axe  $Oz$ .

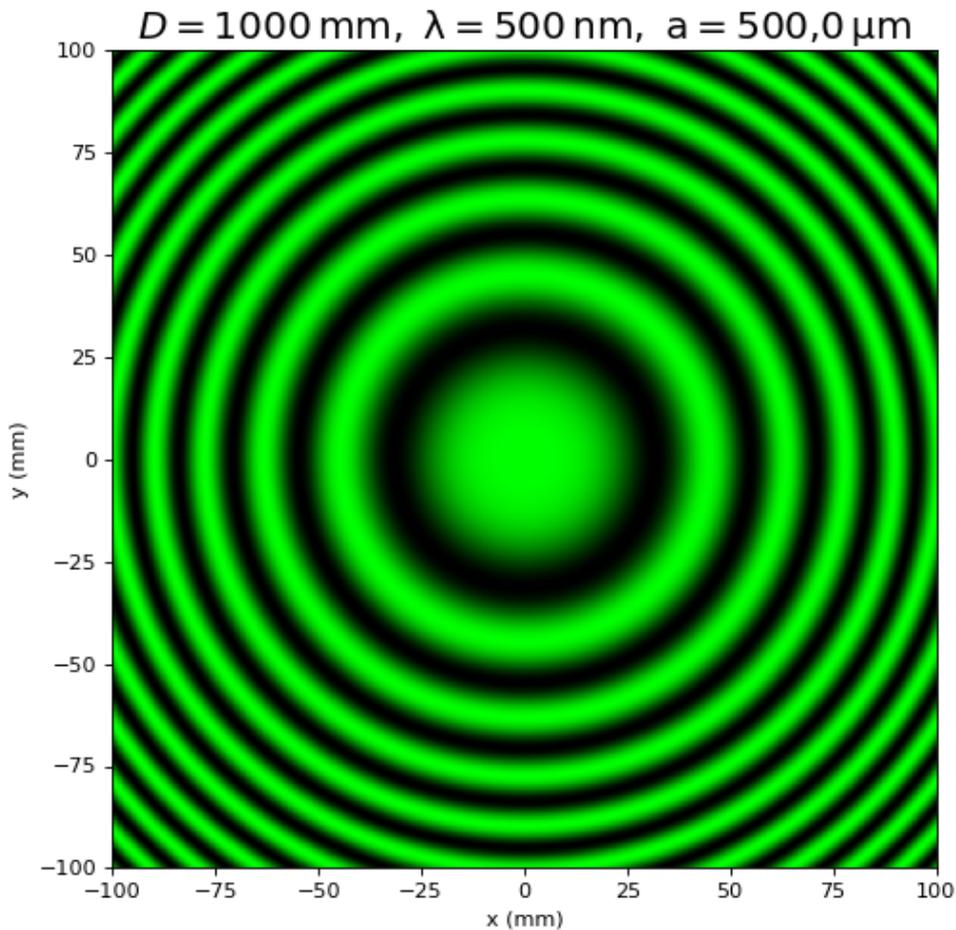
```
D = 1000.0
Lambda=0.5e-3
a=0.5
L = 100.0
```

```
def phi(x,y):
    u2 = x**2+y**2
    delta = numpy.sqrt(u2+(D-a/2)**2)-numpy.sqrt(u2+(D+a/2)**2)
    return 2*math.pi/Lambda*delta
```

```
dL = L/500
x,y = numpy.mgrid[-L:L:dL,-L:L:dL]
I = 2*(1.0+numpy.cos(phi(x,y)))
I=I.T/4
(M,N) = I.shape
image = numpy.zeros((M,N,3))
image[:, :, 0] = I*0
image[:, :, 1] = I
image[:, :, 2] = I*0
```

```
figure(figsize=(7,7))
imshow(image,extent=[-L,L,-L,L],vmin=0,vmax=4)
```

```
ylabel('y (mm)')
xlabel('x (mm)')
title(r"$D=1000\ ,\ \rm{mm},\ \ \lambda=500\ ,\ \rm{nm},\ \ a=500\{,\}0\ ,\ \rm{\mu m}$", fontsize=18)
```



On voit sur cet exemple un disque central lumineux (l'interférence est constructive au centre), entouré d'anneaux. On remarque que la distance entre les anneaux diminue lorsqu'on s'éloigne du centre. On ne peut donc pas définir d'interfrange.

Pour calculer la différence de marche, on utilise les coordonnées  $(\rho, \theta)$  définies sur la figure.  $\rho = OM$  est la distance au centre des deux sources et  $\theta$  est l'angle  $(OC, OM)$ . Les distances s'écrivent :

$$r_1 = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \rho^2 + a\rho \cos \theta} \quad (90)$$

$$r_2 = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \rho^2 - a\rho \cos \theta} \quad (91)$$

Un développement limité à l'ordre 1 en  $a/\rho$  conduit à :

$$\delta = na \cos \theta \quad (92)$$

La différence de marche au centre  $C$  est :

$$\delta_c = na \quad (93)$$

Ce résultat est géométriquement évident. Considérons alors l'ordre d'interférence au centre, défini par

$$p_c = \frac{\delta_c}{\lambda_0} \quad (94)$$

En général, l'ordre d'interférence au centre n'est ni entier, ni demi-entier. L'état d'interférence au centre est donc quelconque (sur la figure ci-dessus, il est entier). L'ordre d'interférence pour un point quelconque est :

$$p = \frac{na \cos \theta}{\lambda_0} \quad (95)$$

Lorsqu'on s'éloigne du centre, l'angle  $\theta$  augmente donc l'ordre d'interférence décroît. Le premier anneau lumineux rencontré a donc un ordre d'interférence égal au plus grand entier inférieur ou égal à l'ordre au centre :

$$p_1 = E(p_c) \quad (96)$$

L'anneau suivant a un ordre entier  $p_2 = p_1 - 1$ , le suivant  $p_3 = p_1 - 2$ , etc.

Voici un exemple, avec un ordre d'interférence non entier au centre :

```
a = 0.50015
I = 2*(1.0+numpy.cos(phi(x,y)))
I=I.T/4
(M,N) = I.shape
image = numpy.zeros((M,N,3))
image[:, :, 0] = I*0
image[:, :, 1] = I
image[:, :, 2] = I*0
figure(figsize=(7,7))
imshow(image, extent=[-L, L, -L, L])
xlabel('y (mm)')
ylabel('x (mm)')
title(r"$D=1000\$, \rm{mm}, \ \ \lambda=500\$, \rm{nm}, \ \ a=500\{,\}15\$, \rm{\mu m}$", fontsize=18)
```

