# Système solaire : orbites képlériennes

## 1. Introduction

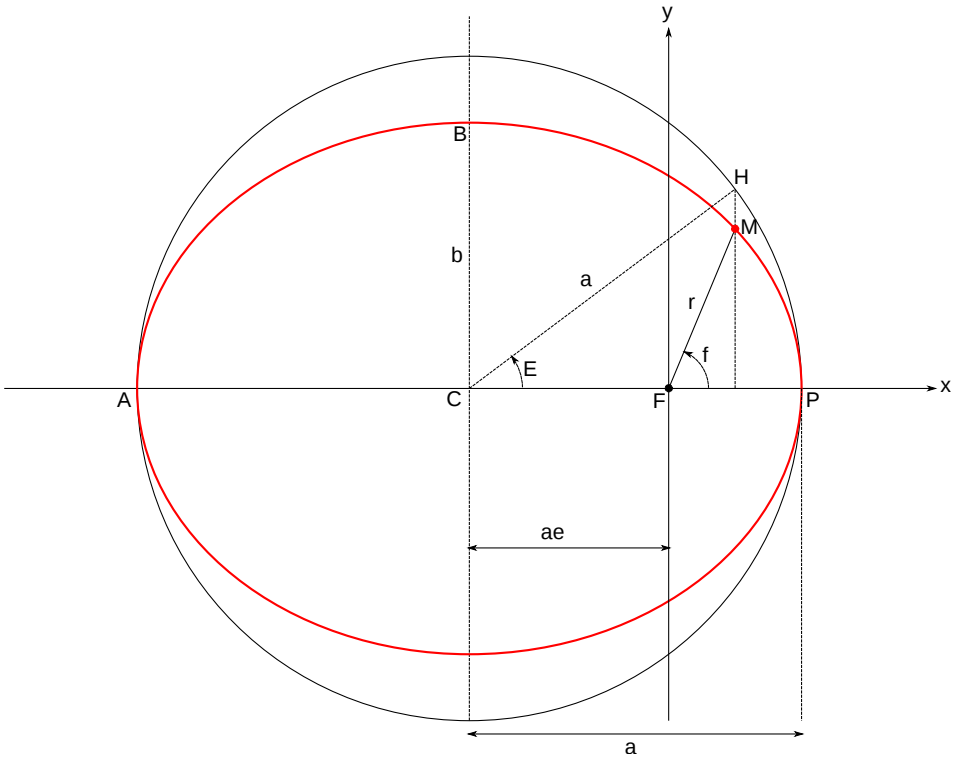
L'orbite képlérienne d'une planète du système solaire est obtenue en considérant seulement la force attractive du Soleil, c'est-à-dire en négligeant les forces perturbatrices des autres planètes. Il s'agit d'une orbite elliptique dont le Soleil occupe un foyer.

En première approximation, les positions des planètes peuvent être calculées avec cette hypothèse d'orbites képlériennes. Ces positions pourront être utilisées pour la simulation de mouvements de comètes ou de sondes spatiales, des objets dont le mouvement n'est pas du tout képlérien. Nous allons voir comment utiliser les tables donnant les paramètres des orbites afin de calculer les positions des planètes à une date donnée.

## 2. Orbite képlérienne

### 2.a. L'orbite dans son plan

Lorsque la planète est soumise seulement à la force centrale attractive du Soleil, son mouvement se fait dans un plan. On commence donc par définir l'orbite dans son plan.




Le Soleil se trouve au foyer $F$ de l'ellipse. Le repère $Fxy$ est dans le plan de l'orbite, l'axe $Fx$ pointant vers le périhélie. La planète se trouve au point $M$, repéré par ses coordonnées cartésiennes $(x, y)$. Ses coordonnées polaires sont $(r, f)$. L'angle $f$ est *l'anomalie vraie*. L'équation polaire de la trajectoire s'écrit :

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(f)} \tag{1}$$

La distance entre le centre $C$ de l'ellipse et le périhélie $P$ est le demi-grand axe, noté $a$. La distance entre le centre de l'ellipse et son foyer $F$ est $CF = ae$, où $e$ est *l'excentricité*. Le paramètre de l'ellipse est $p = FP = a(1-e)$. Le demi petit-axe $b = CB$ est obtenu en utilisant la propriété $FB = a$.

L'équation (1) donne la trajectoire mais ne dit rien sur son parcours dans le temps. Il faut pour cela utiliser la loi des aires :

$$\frac{1}{2}r^2\frac{df}{dt} = \dot{S} = \frac{2\pi ab}{T} \tag{2}$$

où $T$ est la période de révolution. Bien qu'il soit possible d'intégrer numériquement cette équation différentielle pour obtenir l'anomalie vraie à l'instant $t$, il existe une méthode plus simple (développée bien avant l'invention des calculateurs électroniques) qui repose sur une construction géométrique donnée sur la figure ci-dessus.

On considère le cercle de rayon $a$ qui circonscrit l'ellipse, et le point $H$, intersection de ce cercle avec la droite perpendiculaire au grand-axe et passant par $M$. L'angle $E$ est *l'anomalie excentrique*. Les coordonnées de $M$ s'expriment en fonction de cet angle :

$$x = a(\cos E - e) \tag{3}$$
$$y = a\sqrt{1-e^2}\sin E \tag{4}$$

L'anomalie excentrique s'exprime en fonction du temps par l'équation implicite suivante, appelée *équation de Kepler* :

$$E - e\sin E = n(t-\tau) \tag{5}$$

$\tau$ est l'instant de passage de la planète au périhélie. $n$ est le mouvement moyen, relié à la période par $n = 2\pi/T$.

On définit aussi l'anomalie moyenne :

$$M = n(t-\tau) \tag{6}$$

Si l'on souhaite simplement tracer l'ellipse complète, on échantillonne $E$ dans l'intervalle $[0, 2\pi]$ puis on calcule les coordonnées. Pour obtenir le mouvement de la planète au cours du temps, ou sa position à un instant donné, il faut résoudre l'équation de Kepler.

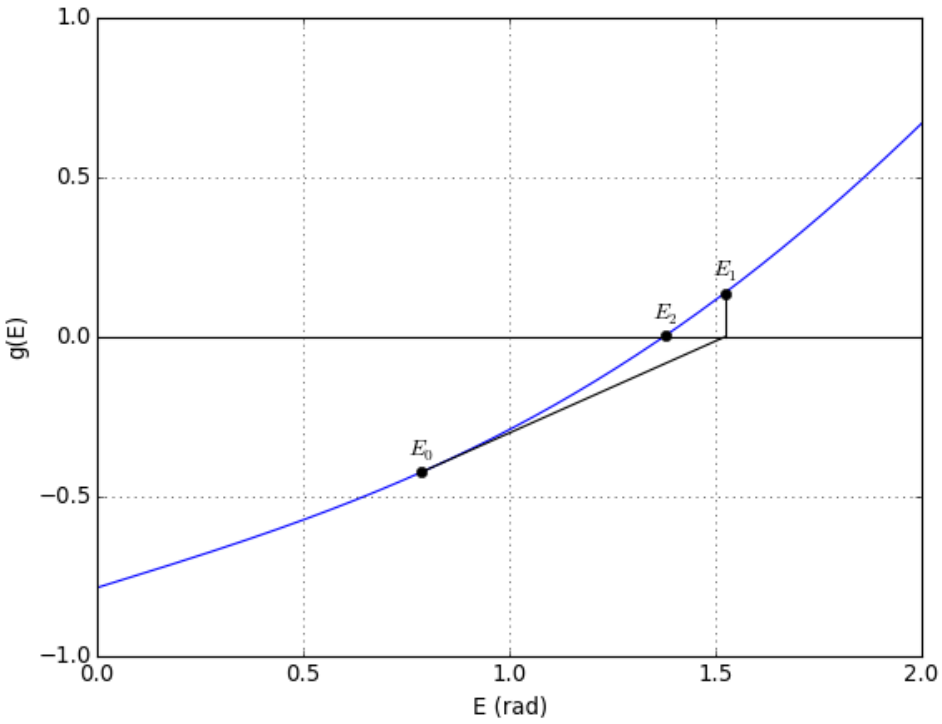
### 2.b. Résolution de l'équation de Kepler

Pour obtenir l'anamolie excentrique $E$ à l'instant $t$, on calcule tout d'abord l'anomalie moyenne $M$. Il faut ensuite résoudre l'équation de Kepler (5), une équation non linéaire qui ne peut être résolue que de manière approchée.

Parmi plusieurs méthodes de résolution, on peut utiliser la méthode de *Newton-Raphson*. Pour cela, on définit la fonction suivante :

$$g(E) = E - e\sin E - M \tag{7}$$

dont il s'agit de trouver la racine. Une première estimation de l'anomalie excentrique est $E_0 = M$. La figure suivante montre le tracé de $g(E)$ dans le cas $M = \pi/4$, pour une excentricité $e = 0,6$ :



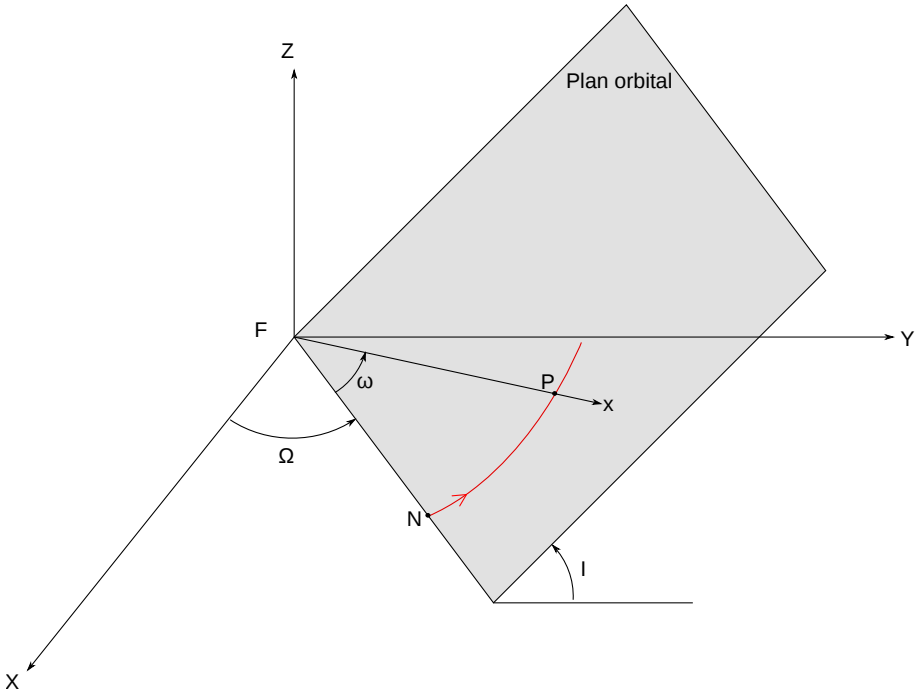

La méthode de *Newton-Raphson* consiste à calculer une suite d'approximations $E_i$ qui converge vers la solution. Pour obtenir $E_{i+1}$ à partir de $E_i$, on calcule la dérivée $g'(E_i)$ et on trace l'intersection de la tangente en $E_i$ avec l'axe des abscisses. La nouvelle estimation est donc donnée par :

$$E_{i+1} = E_i - \frac{g(E_i)}{g'(E_i)} \tag{8}$$

En appliquant de manière récurrente cette relation, on obtient rapidement une estimation $E_i$ très proche de la solution. Une tolérance $\epsilon$ est choisie. Lorsque $|E_{i+1} - E_i| < \epsilon$, l'itération est stoppée.

### 2.c. L'orbite dans l'espace

Il faut à présent placer l'orbite de la planète dans l'espace. On utilise pour cela un repère héliocentrique $FXYZ$. Le plan de référence $FXY$ est le plan orbital de la Terre (appelé aussi plan de l'écliptique) à la date J2000, l'axe X pointant vers la position de la Terre à l'équinoxe de printemps (point vernal) à la date J2000. La date J2000 est le 1 janvier 2000 (12h00).




L'orbite d'une planète est définie par les éléments suivants :

- ▷ Le demi-grand axe $a$.
- ▷ L'excentricité $e$.
- ▷ L'inclinaison $I$ de l'orbite par rapport au plan de référence $FXY$.
- ▷ La longitude du nœud ascendant $\Omega$.
- ▷ L'argument du périhélie $\omega$.

Les trois derniers permettent de placer l'orbite dans le repère $FXYZ$.

Le nœud ascendant est le point $N$ d'intersection de l'orbite avec le plan de référence $FXY$, lorsque la planète le franchit vers le nord (Z croissant).

On utilise aussi la longitude du périhélie, définie par la somme des deux angles non coplanaires suivante :

$$\overline{\omega} = \Omega + \omega \tag{9}$$

et la longitude moyenne définie par :

$$L = \overline{\omega} + M \tag{10}$$

Remarque : les angles dénommés *longitude* sont tous définis avec l'axe FX pour référence, correspondant à l'équinoxe de printemps à la date J2000.

Un changement de repère permet de calculer les coordonnées de la planète $(X, Y, Z)$ à partir de $(x, y)$. Il s'exprime sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = R_3 R_2 R_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \tag{11}$$

où $R_1, R_2, R_3$ sont trois matrices de rotation définies par :

$$R_1 = \begin{pmatrix} \cos\omega & -\sin\omega & 0 \\ \sin\omega & \cos\omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{12}$$

$$R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos I & -\sin I \\ 0 & \sin I & \cos I \end{pmatrix} \tag{13}$$

$$R_3 = \begin{pmatrix} \cos\Omega & -\sin\Omega & 0 \\ \sin\Omega & \cos\Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{14}$$

### 2.d. Date julienne

Le temps est mesuré en secondes. On utilise aussi le jour julien (86400 $s$), l'année julienne (365, 25 jours) et le siècle julien (36525 jours).

La date julienne (DJ) est le nombre de jours juliens depuis le 1er janvier de l'an 4713 avant J.C. à 12 h. La date julienne se calcule à partir de la date $(A, M, J)$ de la manière suivante.

On calcule tout d'abord $a$ et $m$ définis par :

$$a = A - 1,\ m = M + 12\ si\ M \leq 2 \tag{15}$$

$$a = A,\ m = M\ si\ M > 2 \tag{16}$$

puis la quantité $b$ défini par :

$$b = int(a/400) - int(a/100) \tag{17}$$

La fonction $int(x)$ donne le plus grand entier inférieur ou égal à $x$.

La date julienne est alors donnée par la formule :

$$DJ = int(365.25a) + int(30.6001(m+1)) + b + 1720996.5 + J + UT/24 \tag{18}$$

où $UT$ est l'heure universelle.

La date julienne de J2000 est 2451545.

### 2.e. Utilisation des tables d'éléments

Le temps utilisé dans les tables d'éléments est le nombre de siècles juliens depuis la date J2000. Il se calcule à partir de la date julienne par :

$$t = \frac{JD - 2451545}{36525} \tag{19}$$

Ce temps est bien sûr négatif pour une date antérieure à J2000.

Voici la table que nous utiliserons (obtenue au Jet Propulsion Laboratory) :

| a | e | I | L | long.peri |
|---|---|---|---|---|
| AU, AU/Cy | rad, rad/Cy | deg, deg/Cy | deg, deg/Cy | deg, deg/C |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Mercury | 0.38709927 | 0.20563593 | 7.00497902 | 252.25032350 | 77.4577962 |
| | 0.00000037 | 0.00001906 | -0.00594749 | 149472.67411175 | 0.1604768 |
| Venus | 0.72333566 | 0.00677672 | 3.39467605 | 181.97909950 | 131.6024671 |
| | 0.00000390 | -0.00004107 | -0.00078890 | 58517.81538729 | 0.0026832 |
| Earth | 1.00000261 | 0.01671123 | -0.00001531 | 100.46457166 | 102.9376819 |
| | 0.00000562 | -0.00004392 | -0.01294668 | 35999.37244981 | 0.3232736 |
| Mars | 1.52371034 | 0.09339410 | 1.84969142 | -4.55343205 | -23.9436295 |
| | 0.00001847 | 0.00007882 | -0.00813131 | 19140.30268499 | 0.4444108 |
| Jupiter | 5.20288700 | 0.04838624 | 1.30439695 | 34.39644051 | 14.7284798 |
| | -0.00011607 | -0.00013253 | -0.00183714 | 3034.74612775 | 0.2125266 |
| Saturn | 9.53667594 | 0.05386179 | 2.48599187 | 49.95424423 | 92.5988783 |
| | -0.00125060 | -0.00050991 | 0.00193609 | 1222.49362201 | -0.4189721 |
| Uranus | 19.18916464 | 0.04725744 | 0.77263783 | 313.23810451 | 170.9542763 |
| | -0.00196176 | -0.00004397 | -0.00242939 | 428.48202785 | 0.4080528 |
| Neptune | 30.06992276 | 0.00859048 | 1.77004347 | -55.12002969 | 44.9647622 |
| | 0.00026291 | 0.00005105 | 0.00035372 | 218.45945325 | -0.3224146 |
| Pluto | 39.48211675 | 0.24882730 | 17.14001206 | 238.92903833 | 224.0689162 |
| | -0.00031596 | 0.00005170 | 0.00004818 | 145.20780515 | -0.0406294 |

Cette table est valable entre les années 1800 et 2050.

Pour chaque planète, la première ligne donne le demi grand-axe $a$ (en unité astronomique), l'excentricité, l'inclinaison de l'orbite $I$, la longitude moyenne $L$, la longitude du périhélie $\overline{\omega}$, la longitude du nœud ascendant $\Omega$. Les angles sont donnés en degrés ; ils devront être convertis en radian pour les calculs trigonométriques.

Toutes ces valeurs sont données à la date J2000. Elles varient lentement dans le temps, à cause des perturbations mutuelles entre planètes. Pour chaque planète, la seconde ligne donne les taux de variation par siècle. La longitude moyenne $L$ varie rapidement en raison du mouvement orbital (variation de $M$ avec le temps). Par exemple pour Mercure, la longitude moyenne s'écrit en fonction du temps $t$ (en siècles juliens depuis J2000) :

$$L = 252.25032350 + 149472.67411175\ t \tag{20}$$

L'anomalie moyenne se déduit de la longitude moyenne par la relation :

$$M = L - \overline{\omega} \tag{21}$$

## 3. Application : mouvement d'une comète

Les comètes qui traversent le système solaire sont fortement influencées par les forces attractives des planètes, particulièrement celle de Jupiter. Pour déterminer la trajectoire d'une comète, nous allons intégrer l'équation différentielle de son mouvement, en utilisant les positions des planètes données par l'approximation de l'orbite képlerienne.

La mise en équation du mouvement des corps dans le système solaire est expliquée en détail dans Système solaires : équations différentielles. On adopte ici une approche simplifiée consistant à supposer que le référentiel héliocentrique est galiléen, une hypothèse

pertinente compte tenu de la précision recherchée. L'accélération de la comète (point matériel $P$) s'écrit alors :

$$\overrightarrow{a} = -k^2 \frac{\overrightarrow{SP}}{SP^3} - k^2 \sum_j m_j \frac{\overrightarrow{P_jP}}{P_jP^3} \tag{22}$$

L'indice $j$ désigne une planète, $m_j$ sa masse exprimée en masse solaire. L'unité de temps est le jour. L'unité de longueur est l'unité astronomique. $k$ est la constante de Gauss :

$$k = 0{,}01720209895\ rad \cdot j^{-1} \tag{23}$$

Un système différentiel à 6 inconnues est défini avec les trois coordonnées $X, Y, Z$ de la comète et les trois vitesses corresponsantes.

Les conditions initiales (positions et vitesses à une date donnée) sont obtenues à L'institut de mécanique céleste et de calcul des éphémérides (IMCCE). Le fichier ELTNOM.TXT accessible à cometpro contient des données sur un grand nombre de comètes. Voici par exemple les données pour la comète de Halley :

```
0742 18/02/2008 1P                    P/Halley                          P. Rocher
2446470.5 1   8154  1.23 29/08/1909-08/03/2003
+3.42333053579379E-0001 -4.76486784837047E-0001 -2.36940933412073E-0002
-2.44458041310748E-0002 -1.65490377204746E-0002 -1.09512479644013E-0002
+8.90665256529854E-0010 +5.70211175176559E-0011 +0.00000000000000E+0000
+2.44647095892940E+0006 +5.87103319064850E-0001 +9.67276318611043E-0001
+1.11865644492202E+0002 +5.88600456369519E+0001 +1.62242232614955E+0002
 5.40 10.00  5.00
12.29  5.00  5.00
```

On s'intéresse à la première ligne, qui comporte le code identifiant la comète (1P) et la deuxième ligne, dont le premier champ donne la date julienne des relevés. La troisième ligne contient les coordonnées $X, Y, Z$ à cette date (en UA), et la quatrième ligne les vitesses correspondantes (en UA/j).

## 4. Programme Python

### 4.a. Trajectoires des planètes

Les données et les fonctions sont réunies dans une classe intitulée `Kepler`. Le constructeur de la classe effectue la lecture des fichiers de données (pour les planètes et les comètes) et remplit des dictionnaires. Voici les différents dictionnaires :

- ▷ `a` et `a` : demi grand axe (UA) et variation par siècle.
- ▷ `e` et `de` : excentricité et variation par siècle.
- ▷ `I` et `dI` : inclinaison de l'orbite (en degrés) et variation par siècle.
- ▷ `L` et `dL` : longitude moyenne (degrés) et variation par siècle.
- ▷ `Lperi` et `dLperi` : longitude du périhélie (degrés) et variation par siècle.
- ▷ `Lnode` et `dLnode` : longitude du nœud ascendant (degrés) et variation par siècle.

Pour accéder par exemple au demi grand-axe de Mercure à la date J2000, on écrira : `self.a["Mercury"]`.

Les dictionnaires utilisés pour le calcul des trajectoires de comètes sont :

- ▷ `masse` : masse de la planète exprimée en masse solaire.
- ▷ `comete_dj` : date julienne des données de la comète.
- ▷ `comete_Yi` : condition initiale (positions et vitesses) pour la comète.
- ▷ `comete_e` : excentricité.
- ▷ `comete_nom` : nom du découvreur de la comète.

Les clefs pour les deux derniers dictionnaires sont les codes des comètes, que l'on peut consulter dans le fichier cometes.txt.

Les fichiers des données sont elementsPlanetes.txt et ELTNOM.TXT.

Voici la classe avec le constructeur complet et les entêtes des différentes fonctions : prototypeKepler.py

```
import numpy
from matplotlib.pyplot import *
import re
import os
from scipy.integrate import odeint

class Kepler:
    def __init__(self):
        self.epsilon = 1e-6
        f=open("elementsPlanetes.txt","r")
        self.a={}
        self.e={}
        self.I={}
        self.L={}
        self.Lperi={}
        self.Lnode={}
        self.da={}
        self.de={}
        self.dI={}
        self.dL={}
        self.dLperi={}
        self.dLnode={}
        lines = f.readlines()
        n=3
        for p in range(9):
            ligne1 = re.split("[\s]+",lines[n])
            ligne2 = re.split("[\s]+",lines[n+1])
            n += 2
            nom = ligne1[0]
            print(nom)
            self.a[nom] = float(ligne1[1])
            self.e[nom] = float(ligne1[2])
            self.I[nom] = float(ligne1[3])
```

```
        self.L[nom] = float(ligne1[4])
        self.Lperi[nom] = float(ligne1[5])
        self.Lnode[nom] = float(ligne1[6])
        self.da[nom] = float(ligne2[1])
        self.de[nom] = float(ligne2[2])
        self.dI[nom] = float(ligne2[3])
        self.dL[nom] = float(ligne2[4])
        self.dLperi[nom] = float(ligne2[5])
        self.dLnode[nom] = float(ligne2[6])

    f.close()
    self.lettre = {'Mercury':'M','Venus':'V','Earth':'T','Mars':'Ma','Jupiter':'J
    self.deg2rad = numpy.pi/180
    self.rad2deg = 180/numpy.pi

    self.masse={}
    self.masse["Mercury"] = 1.0/6023600.0
    self.masse["Venus"] = 1.0/408523.5
    self.masse["Earth"] = 1.0/328900.5
    self.masse["Mars"] = 1.0/3098710.0
    self.masse["Jupiter"] = 1.0/1047.355
    self.masse["Saturn"] = 1.0/3498.5
    self.masse["Uranus"] = 1.0/22869.0
    self.masse["Neptune"] = 1.0/19314.0
    k = 0.01720209895 # constante de Gauss
    self.k2 = k*k

    # cometes
    self.comete_dj={}
    self.comete_Yi={}
    self.comete_e={}
    self.comete_nom={}
    f = open("ELTNOM.TXT","r")
    #g = open("cometes.txt","w")
    lines = f.readlines()
    for n in range(0,len(lines),9):
        ligne1 = re.split("[\s]+",lines[n])
        ligne2 = re.split("[\s]+",lines[n+1])
        ligne3 = re.split("[\s]+",lines[n+2])
        ligne4 = re.split("[\s]+",lines[n+3])
        ligne6 = re.split("[\s]+",lines[n+5])
        code =lines[n][17:25]
        code=code.replace(" ","")
        dj = float(ligne2[0])
        self.comete_dj[code] = dj
        self.comete_Yi[code] = [float(ligne3[0]),float(ligne3[1]),float(ligne3[2]
        nom = lines[n][27:56]
        nom=nom.replace(" ","")
```

```
            e = float(ligne6[2])
            self.comete_nom[code] = nom
            self.comete_e[code] = e
            #g.write("%s\t%s\t DJ=%0.1f\t e=%0.3f\n"%(code,nom,dj,e))
        #g.close()
        f.close()
    def dateJulienne(self,annee,mois,jour,heure):
        pass
    def t(self,DJ):
        pass
    def equationKepler(self,e,M,epsilon):
        pass
    def position_xy(self,planete,t):
        pass
    def ellipse_xy(self,planete,t,N=1000):
        pass
    def xy_XYZ(self,planete,t,x,y):
        pass
    def position_XYZ(self,planete,t):
        pass
    def ellipse_XYZ(self,planete,t,N=1000):
        pass
```

La fonction `dateJulienne(self,annee,mois,jour,heure)` renvoit la date julienne (en jours) pour une date et une heure données.

La fonction `t(self,DJ)` renvoit, pour une date julienne donnée, le temps écoulé depuis la date J2000, exprimé en siècles.

La fonction `equationKepler(self,e,M,epsilon)` résout l'équation de Kepler pour une excentricité, une anomalie moyenne et une tolérance donnés. Elle renvoit l'anomalie excentrique $E$.

La fonction `position_xy(self,planete,t)` calcule les coordonnées $(x, y)$ d'une planète dans son plan orbital. Le nom et le temps (siècles depuis J2000) sont donnés.

La fonction `ellipse_xy(self,planete,t,N=1000)` renvoit la trajectoire elliptique d'une planète calculée à partir des éléments à un instant donné, sous la forme d'un n-uplet $(x, y)$. Le nombre de points est `N`, égal à 1000 par défaut.

La fonction `xy_XYZ(self,planete,t,x,y)` effectue la conversion des coordonnées $(x, y)$ en coordonnées $(X, Y, Z)$ dans le repère héliocentrique J2000.

La fonction `position_XYZ(self,planete,t)` renvoit la position d'une planète à un instant donné.

La fonction `ellipse_XYZ(self,planete,t,N=1000)` renvoit la trajectoire elliptique d'une planète calculée à partir des éléments à un instant donné, sous la forme d'un n-uplet $(X, Y, Z)$. Le nombre de points est `N`, égal à 1000 par défaut.

```
import numpy
from matplotlib.pyplot import *
import re
import os
from scipy.integrate import odeint
```

```
class Kepler:
    def __init__(self):
        self.epsilon = 1e-6
        f=open("elementsPlanetes.txt","r")
        self.a={}
        self.e={}
        self.I={}
        self.L={}
        self.Lperi={}
        self.Lnode={}
        self.da={}
        self.de={}
        self.dI={}
        self.dL={}
        self.dLperi={}
        self.dLnode={}
        lines = f.readlines()
        n=3
        for p in range(9):
            ligne1 = re.split("[\s]+",lines[n])
            ligne2 = re.split("[\s]+",lines[n+1])
            n += 2
            nom = ligne1[0]
            print(nom)
            self.a[nom] = float(ligne1[1])
            self.e[nom] = float(ligne1[2])
            self.I[nom] = float(ligne1[3])
            self.L[nom] = float(ligne1[4])
            self.Lperi[nom] = float(ligne1[5])
            self.Lnode[nom] = float(ligne1[6])
            self.da[nom] = float(ligne2[1])
            self.de[nom] = float(ligne2[2])
            self.dI[nom] = float(ligne2[3])
            self.dL[nom] = float(ligne2[4])
            self.dLperi[nom] = float(ligne2[5])
            self.dLnode[nom] = float(ligne2[6])

        f.close()
        self.lettre = {'Mercury':'M','Venus':'V','Earth':'T','Mars':'Ma','Jupiter':'J
        self.deg2rad = numpy.pi/180
        self.rad2deg = 180/numpy.pi

        self.masse={}
        self.masse["Mercury"] = 1.0/6023600.0
        self.masse["Venus"] = 1.0/408523.5
        self.masse["Earth"] = 1.0/328900.5
        self.masse["Mars"] = 1.0/3098710.0
```

```
        self.masse["Jupiter"] = 1.0/1047.355
        self.masse["Saturn"] = 1.0/3498.5
        self.masse["Uranus"] = 1.0/22869.0
        self.masse["Neptune"] = 1.0/19314.0
        k = 0.01720209895 # constante de Gauss
        self.k2 = k*k

        # cometes
        self.comete_dj={}
        self.comete_Yi={}
        self.comete_e={}
        self.comete_nom={}
        f = open("ELTNOM.TXT","r")
        #g = open("cometes.txt","w")
        lines = f.readlines()
        for n in range(0,len(lines),9):
            ligne1 = re.split("[\s]+",lines[n])
            ligne2 = re.split("[\s]+",lines[n+1])
            ligne3 = re.split("[\s]+",lines[n+2])
            ligne4 = re.split("[\s]+",lines[n+3])
            ligne6 = re.split("[\s]+",lines[n+5])
            code =lines[n][17:25]
            code=code.replace(" ","")
            dj = float(ligne2[0])
            self.comete_dj[code] = dj
            self.comete_Yi[code] = [float(ligne3[0]),float(ligne3[1]),float(ligne3[2]
            nom = lines[n][27:56]
            nom=nom.replace(" ","")
            e = float(ligne6[2])
            self.comete_nom[code] = nom
            self.comete_e[code] = e
            #g.write("%s\t%s\t DJ=%0.1f\t e=%0.3f\n"%(code,nom,dj,e))
        #g.close()
        f.close()

    def dateJulienne(self,annee,mois,jour,heure):
        if mois<=2:
            a=annee-1
            m=mois+12
        else:
            a=annee
            m=mois
        b=int(a/400)-int(a/100)
        DJ = int(365.25*a)+int(30.6001*(m+1))+b+1720996.5+jour+heure*1.0/24
        return DJ

    def t(self,DJ):
        return (DJ-2451545)*1.0/36525
```

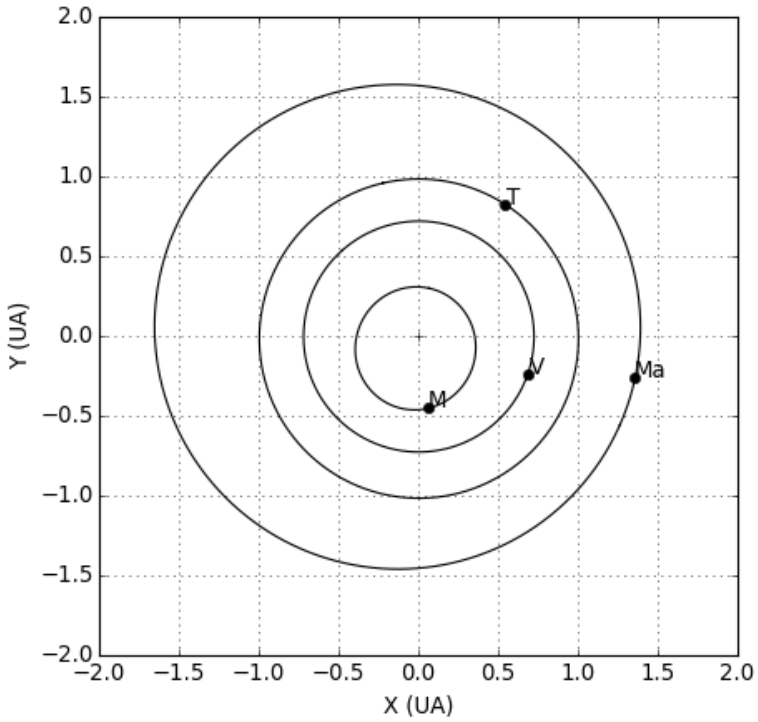
```
    def equationKepler(self,e,M,epsilon):
        E = M
        delta = 1e6
        while delta > epsilon:
            new_E = E-(E-e*numpy.sin(E)-M)/(1-e*numpy.cos(E))
            delta = abs(new_E-E)
            E = new_E
        return E

    def position_xy(self,planete,t):
        L = self.L[planete]+self.dL[planete]*t
        Lperi = self.Lperi[planete]+ self.dLperi[planete]*t
        M = L-Lperi
        e = self.e[planete]+self.de[planete]
        E = self.equationKepler(e,M*self.deg2rad,self.epsilon)
        a = self.a[planete]+self.da[planete]*t
        x = a*(numpy.cos(E)-e)
        y = a*numpy.sqrt(1-e*e)*numpy.sin(E)
        return (x,y)

    def ellipse_xy(self,planete,t,N=1000):
        E = numpy.linspace(0,2*numpy.pi,N)
        a = self.a[planete]+self.da[planete]*t
        e = self.e[planete]+self.de[planete]
        x = a*(numpy.cos(E)-e)
        y = a*numpy.sqrt(1-e*e)*numpy.sin(E)
        return (x,y)

    def xy_XYZ(self,planete,t,x,y):
        I = self.I[planete]+self.dI[planete]*t
        Lperi = self.Lperi[planete]+self.dLperi[planete]*t
        Omega = self.Lnode[planete]+self.dLnode[planete]*t
        I *= self.deg2rad
        Omega *= self.deg2rad
        Lperi *= self.deg2rad
        omega = Lperi-Omega
        cos_omega = numpy.cos(omega)
        sin_omega = numpy.sin(omega)
        R1 = numpy.array([[cos_omega,-sin_omega,0],[sin_omega,cos_omega,0],[0,0,1]])
        cos_I = numpy.cos(I)
        sin_I = numpy.sin(I)
        R2 = numpy.array([[1,0,0],[0,cos_I,-sin_I],[0,sin_I,cos_I]])
        cos_Omega = numpy.cos(Omega)
        sin_Omega = numpy.sin(Omega)
        R3 = numpy.array([[cos_Omega,-sin_Omega,0],[sin_Omega,cos_Omega,0],[0,0,1]])
        R = numpy.dot(R3,numpy.dot(R2,R1))
        xyz = numpy.array([x,y,0])
```

```
        XYZ = numpy.dot(R,xyz)
        return XYZ

    def position_XYZ(self,planete,t):
        (x,y) = self.position_xy(planete,t)
        return self.xy_XYZ(planete,t,x,y)

    def ellipse_XYZ(self,planete,t,N=1000):
        (x,y) = self.ellipse_xy(planete,t,N)
        X = numpy.zeros(N)
        Y = numpy.zeros(N)
        Z = numpy.zeros(N)
        for k in range(N):
            XYZ = self.xy_XYZ(planete,t,x[k],y[k])
            X[k] = XYZ[0]
            Y[k] = XYZ[1]
            Z[k] = XYZ[2]
        return (X,Y,Z)

def systeme_comete(Y,dj,self,planetes):
    rs3 = numpy.power(Y[0]*Y[0]+Y[1]*Y[1]+Y[2]*Y[2],1.5)
    Fx = -Y[0]/rs3
    Fy = -Y[1]/rs3
    Fz = -Y[2]/rs3
    for planete in planetes:
        pos = self.position_XYZ(planete,self.t(dj))
        x = Y[0]-pos[0]
        y = Y[1]-pos[1]
        z = Y[2]-pos[2]
        r3 = numpy.power(x*x+y*y+z*z,1.5)
        Fx -= self.masse[planete]*x/r3
        Fy -= self.masse[planete]*y/r3
        Fz -= self.masse[planete]*z/r3
    return numpy.array([Y[3],Y[4],Y[5],Fx*self.k2,Fy*self.k2,Fz*self.k2])
```

Voici un exemple avec les orbites des planètes internes :

```
kepler = Kepler()
t = kepler.t(kepler.dateJulienne(2016,11,19,0))
figure()
plot([0],[0],"k+")
for planete in ["Mercury","Venus","Earth","Mars"]:
    (X,Y,Z) = kepler.ellipse_XYZ(planete,t)
    plot(X,Y,"k-")
    (X,Y,Z) = kepler.position_XYZ(planete,t)
    plot([X],[Y],"ko")
    text(X+0.01,Y,kepler.lettre[planete])
```

```
axes().set_aspect('equal')
xlabel("X (UA)")
ylabel("Y (UA)")
axis([-2,2,-2,2])
grid()
```




Pour évaluer la précision de ces positions, on pourra calculer et afficher les positions de la planète Mars pour 10 dates espacées de 1 jours, à partir de la date courante. Le service d'éphémérides de l'IMCCE permet de calculer ces positions, à partir de théories beaucoup plus précises que le modèle képlérien utilisé ici. On pourra ainsi évaluer la précision relative de nos résultats.

### 4.b. Trajectoire d'une comète

On doit tout d'abord définir le système différentiel sous forme d'une fonction de la forme :

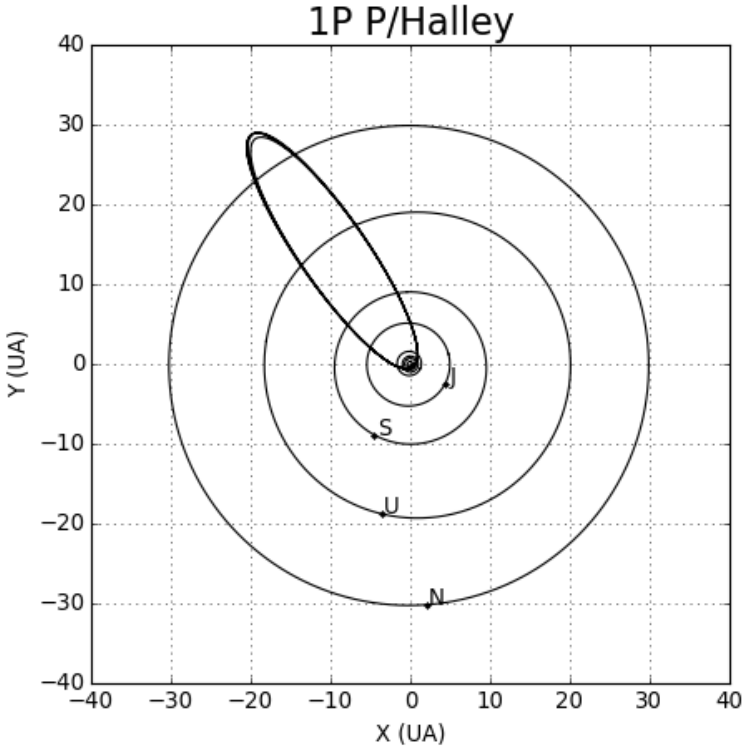
```
def systeme_comete(Y,dj,self,planetes):
    pass
```

Le tableau `Y` contient les coordonnées de la comète et les dérivées par rapport au temps. `dj` contient le temps sous forme de date julienne (en jours). Cette fonction sera transmise à la fonction `scipy.integrate.odeint`. Elle ne fait pas partie de la classe `Kepler`, mais elle doit néanmoins accéder aux données et fonctions de cette classe, c'est

pourquoi nous avons ajouté un argument `self` en troisième position, qui servira à transmettre l'objet de la classe `Kepler`. L'argument `planetes` contient la liste des planètes qu'il faut prendre en compte pour le calcul de l'accélération de la comète.

Voici par exemple le calcul de la trajectoire de la comète de Halley sur une durée de 300 ans :

```
code="1P"
DJ = kepler.comete_dj[code]
Yi = kepler.comete_Yi[code]
t = kepler.t(DJ)
duree=300
temps = numpy.linspace(DJ,DJ+365*duree,2000)
planetes=["Mercury","Venus","Earth","Mars","Jupiter","Saturn","Uranus","Neptune"]
Y = odeint(systeme_comete,Yi,temps,args=(kepler,planetes),atol=1e-12,rtol=1e-6)


figure()
plot([0],[0],"k+")
plot(Y[:,0],Y[:,1],"k-")

for planete in ["Mercury","Venus","Earth","Mars","Jupiter","Saturn","Uranus","Neptune
    (X,Y,Z) = kepler.ellipse_XYZ(planete,t)
    plot(X,Y,"k-")
    (X,Y,Z) = kepler.position_XYZ(planete,t)
    if planete in ["Jupiter","Saturn","Uranus","Neptune"]:
        plot([X],[Y],"k.")
        text(X+0.5,Y,"%s"%kepler.lettre[planete])

axes().set_aspect('equal')
xlabel("X (UA)")
ylabel("Y (UA)")
title("%s %s"%(code,kepler.comete_nom[code]),fontsize=20)

axis([-40,40,-40,40])
grid()
```




## 5. Travaux pratiques

(1) Implémenter les fonctions de la classe `Kepler`.

(2) Tracer les positions des planètes à une date donnée et leur orbite képlérienne.

(3) Faire une comparaison avec les éphémérides de l'IMCCE, par exemple pour la planète Mars.

(4) Implémenter la fonction `systeme_comete` et obtenir les trajectoires de quelques comètes.

(5) Écrire une fonction qui renvoit la liste des codes des comètes dont l'excentricité est comprise entre deux valeurs, classées par excentricité croissante. On pourra utiliser l'algorithme de tri par insertion. La liste des clés du dictionnaire `kepler.comete_e` est obtenue par `kepler.comete_e.keys()`.