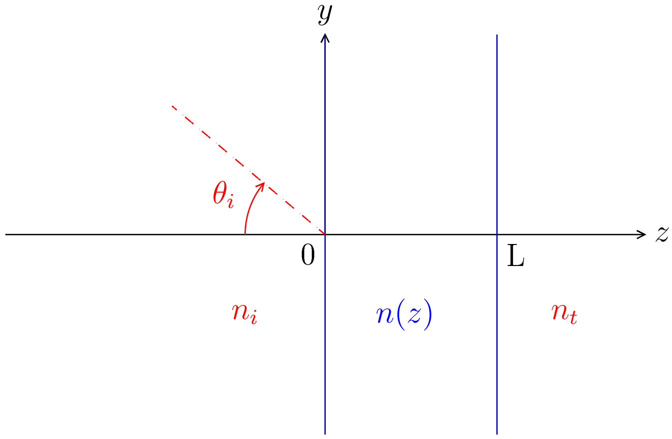
Milieu linéaire stratifié

1. Introduction

Un milieu stratifié linéaire est défini par un indice de réfraction n, éventuellement complexe, ne dépendant que d'une variable d'espace z. On considère un milieu stratifié compris entre $z = 0$ et $z = L$. Une onde électromagnétique plane monochromatique rencontre ce milieu avec un angle d'incidence θ_i. Les indices de part et d'autre sont n_i et n_t.



2. Incidence normale

2.a. Matrice de transfert

La théorie des milieux stratifiés est exposées dans [1] (chap. I.6). On la présente ici dans le cas de l'incidence normale.

Les champs électrique et magnétique sont de la forme :

$$\vec{E} = E(z)\exp(i\omega t)\vec{e_x}$$
$$\vec{B} = B(z)\exp(i\omega t)\vec{e_y}$$

Les équations de Maxwell dans le milieu d'indice $n(z)$ conduisent au système différentiel suivant :

$$\frac{dE}{dz} = -i\omega B$$
$$\frac{dB}{dz} = -i\omega\frac{n^2}{c^2}E$$

Il s'agit d'un système linéaire à coefficients non constants. Soit $(e_1(z), b_1(z))$ une solution (sans dimensions) obtenue avec la condition initiale suivante :

$$e_1(0) = 1$$
$$b_1(0) = 0$$

De même, on considère la solution $(e_2(z), b_2(z))$ obtenue pour les conditions initiales :

$$e_2(0) = 0$$
$$b_2(0) = 1$$

Ces fonctions sans dimensions vérifient le système :

$$\frac{de}{dz} = -i\frac{2\pi}{\lambda}b$$
$$\frac{db}{dz} = -i\frac{2\pi}{\lambda}n^2 e$$

où λ est la longueur d'onde dans le vide.

Le système étant linéaire, la solution générale est une combinaison linéaire de ces deux solutions indépendantes :

$$E(z) = E(0)e_1(z) + cB(0)e_2(z)$$
$$cB(z) = E(0)b_1(z) + cB(0)b_2(z)$$

Il est intéressant de mettre cette relation sous forme matricielle. En définissant le vecteur :

$$V(z) = \begin{pmatrix} E(z) \\ cB(z) \end{pmatrix}$$

et la matrice :

$$N(z) = \begin{pmatrix} e_1(z) & e_2(z) \\ b_1(z) & b_2(z) \end{pmatrix}$$

on obtient la relation :

$$V(z) = N(z)V(0)$$

Il est facile de vérifier que le déterminant de cette matrice est indépendant de z, égal à 1 compte tenu des conditions initiales choisies. On a donc la relation inverse :

$$V(0) = M(z)V(z)$$

avec une matrice de transfert définie par :

$$M(z) = \begin{pmatrix} b_2(z) & -e_2(z) \\ -b_1(z) & e_1(z) \end{pmatrix}$$

2.b. Coefficients de réflexion et de transmission

Le calcul des coefficients de réflexion pour une structure stratifiée multicouches est exposée ici. On doit tout d'abord calculer la matrice de transfert en sortie :

$$M(L) = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$$

En incidence normale, les coefficients sont :

$$r = \frac{(m_{11} + m_{12}n_t)n_i - (m_{21} + m_{22}n_t)}{(m_{11} + m_{12}n_t)n_i + (m_{21} + m_{22}n_t)}$$
$$t = \frac{2n_i}{(m_{11} + m_{12}n_t)n_i + (m_{21} + m_{22}n_t)}$$

Les facteurs de réflexion et de transmission sont :

$$R = |r|^2$$
$$T = \frac{n_t}{n_i}|t|^2$$

2.c. intégration numérique

Pour l'intégration numérique du système différentielle, on pose :

$$e = y_1 + iy_2$$
$$b = y_3 + iy_4$$

Le système s'écrit alors :

$$\frac{dy_1}{dz} = \frac{2\pi}{\lambda}y_4$$
$$\frac{dy_2}{dz} = -\frac{2\pi}{\lambda}y_3$$
$$\frac{dy_3}{dz} = \frac{2\pi}{\lambda}(Im(n^2)y_1 + Re(n^2)y_2)$$
$$\frac{dy_4}{dz} = \frac{2\pi}{\lambda}(-Re(n^2)y_1 + Im(n^2)y_2)$$

La partie imaginaire du carré de l'indice définit l'absorption du milieu.

La résolution du système fait intervenir deux échelles de longueur : la longueur d'onde dans le vide λ et l'échelle de variation de l'indice, que l'on notera e.

3. Exemple

On considère une couche transparente dont l'indice (réel) présente un profil linéaire. On définit tout d'abord la fonction indice puis on fixe la longueur d'onde par rapport à l'épaisseur L, qui est fixée à 1.

```
n1=1;
n2=1.5;
function n=indice2(z)
    n=(n1+z*(n2-n1))^2;
endfunction
lambda=10;
```

La fonction suivante définie le système différentiel à résoudre.

```
k=2*%pi/lambda;
function [deriv]=systeme(z,y)
    deriv(1)=k*y(4),
    deriv(2)=-k*y(3),
    deriv(3)=k*indice2(z)*y(2),
    deriv(4)=-k*indice2(z)*y(1),
endfunction
```

Résolution numérique du système :

```
z=[0:0.01:1];
tolA=1d-6;
tolR=1d-10;
V1=ode([1;0;0;0],0,z,tolR,tolA,systeme);
V2=ode([0;0;1;0],0,z,tolR,tolA,systeme);
p=length(z);
M=[V2(3,p)+%i*V2(4,p), -V2(1,p)-%i*V2(2,p); -V1(3,p)-%i*V1(4,p), V1(1,p)+%i*V1(2,p)]
```

```
0.664618 %i*0.565192
%i*0.8969349 0.7418734
```

Les fonctions suivantes calculent les coefficients de réflexion et de transmission pour une matrice de transfert donnée :

```
function r=reflexion(M,ni,nt)
    r=((M(1,1)+M(1,2)*nt)*ni-(M(2,1)+M(2,2)*nt))/((M(1,1)+M(1,2)*nt)*ni+(M(2,1)+M(2,2
endfunction
function t=transmission(M,ni,nt)
    t=2*ni/((M(1,1)+M(1,2)*nt)*ni+(M(2,1)+M(2,2)*nt))
endfunction
```

Le coefficient de réflexion en puissance est :

```
r=abs(reflexion(M,n1,n2))^2
```

```
0.0327715
```

Pour une longueur d'onde égale à 10 fois l'épaisseur de la zone de variation d'indice, le coefficient de réflexion n'est pas négligeable.

Références

[1] M. Born, E. Wolf, *Principles of Optics*, (Pergamon Press, 1980)