Ondes électromagnétiques dans un milieu linéaire

1. Hypothèses

Le milieu est supposé linéaire et isotrope. En régime sinusoïdal de pulsation ω, on définit :

- γ : la conductivité
- ϵ : la permittivité électrique
- μ : la perméabilité magnétique

Ces grandeurs sont supposées réelles, ce qui exclut le cas des milieux isolants absorbants (diélectriques à pertes). Pour les métaux, la conductivité peut etre considérée comme réelle dans le domaine des radio-fréquences.

En supposant une dépendance temporelle de la forme $exp(i\omega t)$, les équations de Maxwell en l'absence de charges libres s'écrivent :

$$div\vec{E} = 0$$
$$\overrightarrow{rot}\vec{E} = -i\omega\vec{B}$$
$$div\vec{B} = 0$$
$$\overrightarrow{rot}B = \mu\gamma\vec{E} + i\omega\mu\epsilon\vec{E}$$

On obtient ainsi l'équation suivante :

$$\nabla^2\vec{E} = i\omega\mu(\gamma + i\omega\epsilon)\vec{E}$$

2. Onde plane monochromatique

On cherche l'existence d'une onde plane monochromatique, de polarisation rectiligne, dont le champ électrique est de la forme :

$$E_x(z,t) = E_0 \exp(i\omega t)\exp(sz)$$

On obtient ainsi le carré de la constante de propagation :

$$s^2 = -\mu\epsilon\omega^2 + i\mu\gamma\omega$$

La partie réelle négative de s^2 correspond au courant de déplacement alors que sa partie imaginaire positive correspond au courant de conduction. On parle de bon conducteur lorsque ce dernier terme est prépondérant.

Dans le cas particulier du vide, les racines sont :

$$s = \pm i\frac{\omega}{c}$$

et correspondent aux propagations à z croissant et à z décroissant.

Dans le cas général, on s'intéresse à une propagation à z croissant ; on retiendra donc la racine de s^2 dont les parties réelles et imaginaires sont négatives.

Si l'on exclut la cas de l'isolant, on peut définir une longueur de pénétration par :

$$\delta = -\frac{1}{Re(s)}$$

Le nombre d'onde et la longueur d'onde sont définis par :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = -Im(s)$$

La solution cherchée s'écrit finalement :

$$E_x(z,t) = E_0 \exp(-z/\delta) \exp i(\omega t - kz)$$

Pour le calcul numérique, on considère le cas d'un milieu non magnétique ($\mu = \mu_0$) et on utilise la permittivité relative définie par $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$.

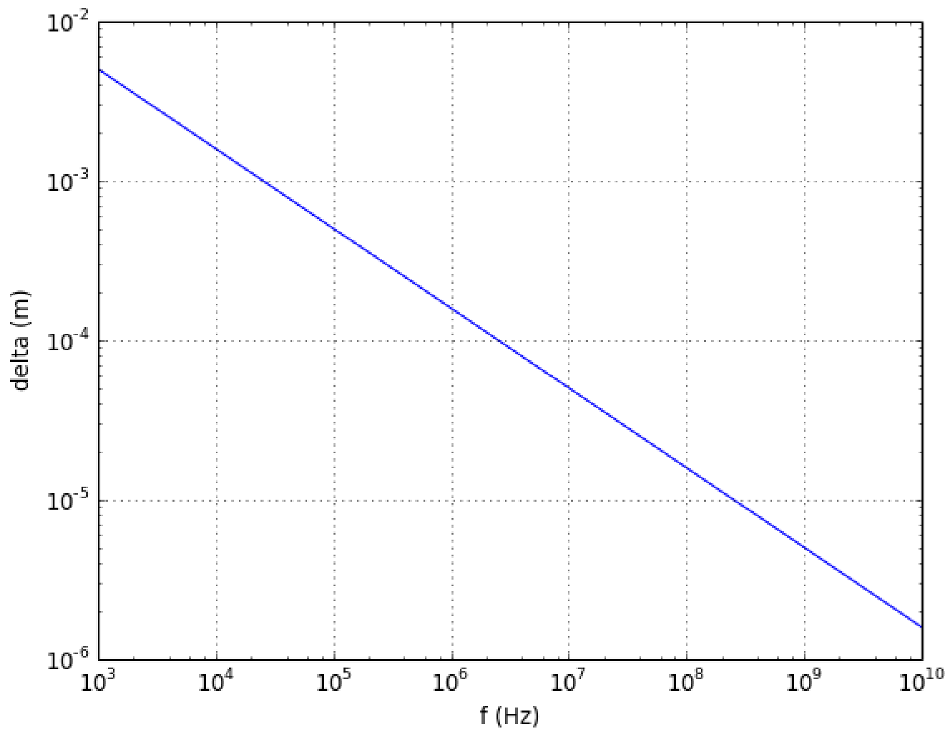
Les fonctions suivantes permettent de calculer la longueur de pénétration et la longueur d'onde en fonction de la fréquence, de la permittivité relative et de la conductivité :

```
from matplotlib.pyplot import *
import numpy
import math

mu0=4*math.pi*1e-7
epsilon0 = 8.85e-12
def s(f,er,gamma):
    return -numpy.sqrt(-mu0*epsilon0*er*(2*math.pi*f)**2+1j*mu0*gamma*2*math.pi*f)
def delta(f,er,gamma):
    z = s(f,er,gamma)
    return -1.0/z.real
def Lambda(f,er,gamma):
    z = s(f,er,gamma)
    return -2*math.pi/z.imag
```

Considérons le cas d'un conducteur métallique et traçons la longueur δ en fonction de la fréquence de 1 kHz à 10 GHz.

```
er=1
gamma=1e7
f = numpy.logspace(3,10)
d = delta(f,er,gamma)
figure()
plot(f,d)
xlabel('f (Hz)')
ylabel('delta (m)')
xscale('log')
yscale('log')
grid()
```



3. Réflexion en incidence normale

On considère une onde plane progressive monochromatique se propageant dans le vide et recontrant la surface plane du milieu en incidence normale. Les champs électriques des ondes incidente, réfléchie et transmise s'écrivent :

$$E_{ix} = E_0 \exp i(\omega t - \frac{\omega}{c} z)$$
$$E_{rx} = r E_0 \exp i(\omega t + \frac{\omega}{c} z)$$
$$E_{tx} = \tau E_0 \exp(i\omega t) \exp(sz)$$

La surface séparant le vide et le milieu est en z=0. La continuité de la composante tangentielle du champ électrique s'écrit :

$$1 + r = \tau$$

Avec l'équation de Maxwell $\overrightarrow{rot}\vec{E} = -i\omega\vec{B}$, on obtient le champ magnétique pour ces trois ondes :

$$B_{iy} = \frac{E_0\mu_0}{\eta_0} \exp i(\omega t - \frac{\omega}{c} z)$$
$$B_{ry} = -r\frac{E_0\mu_0}{\eta_0} \exp i(\omega t + \frac{\omega}{c} z)$$
$$B_{ty} = \tau\frac{E_0\mu}{\eta} \exp(i\omega t) \exp(sz)$$

où l'on a introduit l'impédance du milieu défini par :

$$\eta = \frac{E_x \mu}{B_y} = \frac{\omega \mu}{is}$$

L'impédance du vide est :

$$\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 377\ \Omega$$

On remarquera le changement de signe de l'impédance du vide pour l'onde réfléchie.

La conductivité du milieu étant finie, on exclue la possibilité de courants surfaciques (au sens mathématique). Il y a donc continuité de la composante tangentielle de B/μ :

$$\frac{1}{\eta_0} - \frac{r}{\eta_0} = \frac{\tau}{\eta}$$

On obtient ainsi les coefficients de réflexion et de transmission :

$$r = \frac{\eta - \eta_0}{\eta + \eta_0}$$
$$\tau = \frac{2\eta}{\eta + \eta_0}$$

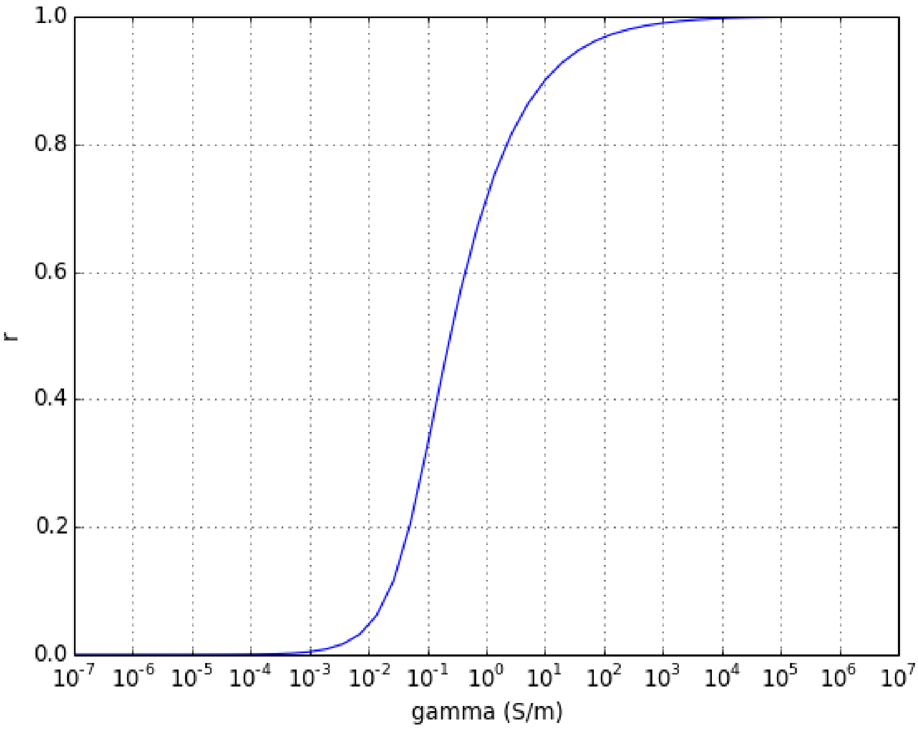
Les fonctions suivantes calculent l'impédance du milieu et le coefficient de réflexion à partir du vide :

```
eta0 = math.sqrt(mu0/epsilon0)
def eta(f,er,gamma):
    return 2*math.pi*f*mu0/(1j*s(f,er,gamma))
def reflexion(f,er,gamma):
    return (eta(f,er,gamma)-eta0)/(eta(f,er,gamma)+eta0)
```

4. Milieu conducteur

Considérons, à une fréquence de 1 MHz, l'influence de la conductivité sur le coefficient de réflexion :

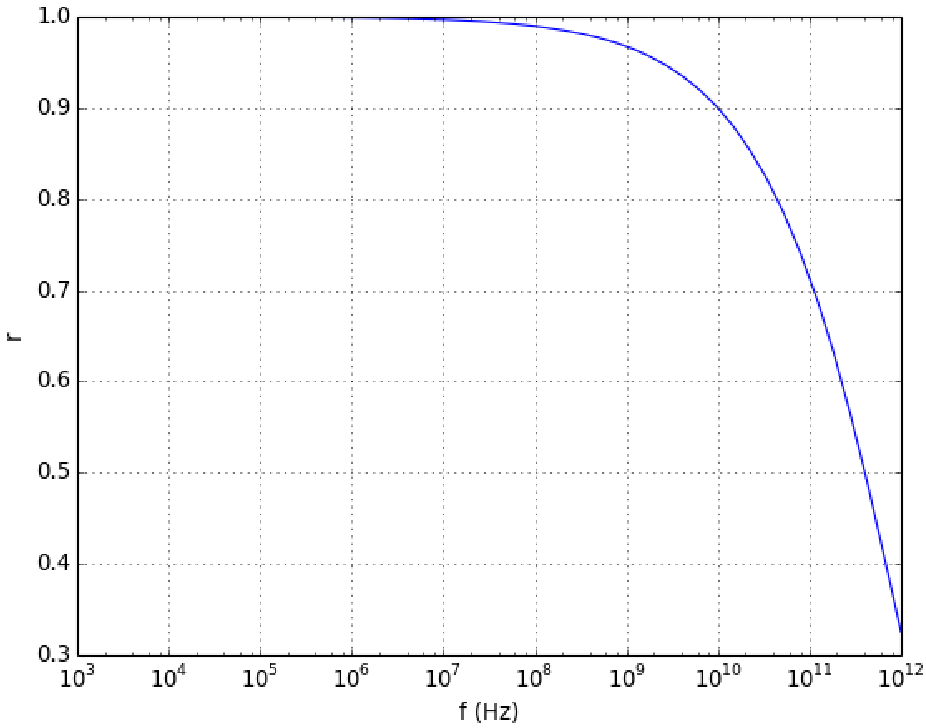
```
f=1.0e9
er=1.0
g = numpy.logspace(-7,7)
figure()
r = numpy.absolute(reflexion(f,er,g))
plot(g,r)
xlabel("gamma (S/m)")
ylabel("r")
grid()
xscale('log')
```



À partir d'une conductivité de 10^3 S/m, la réflexion est pratiquement totale.

Voyons l'influence de la fréquence à conductivité fixée :

```
gamma=1.0e2
er=1
f = numpy.logspace(3,12)
r = numpy.absolute(reflexion(f,er,gamma))
figure()
plot(f,r)
xlabel("f (Hz)")
ylabel("r")
xscale("log")
grid()
```



Un milieu de faible conductivité est donc un bon réflecteur à basse fréquence.

Pour un conducteur métallique à 1 GHz (micro-ondes), calculons l'impédance :

```
print(eta(1e9,1,1e7))
--> (0.019869176586834663+0.019869176476349743j)
```

Celle-ci est très faible par rapport à l'impédance du vide, ce qui signifie que le champ électrique est très faible par rapport au champ magnétique (en comparaison du vide). Le coefficient de transmission est :

```
print(1+reflexion(1e9,1,1e7))
--> (0.00010545728012745226+0.0001054461594758045j)
```

Pour un bon conducteur, le courant de déplacement est négligeable devant le courant de conduction. On considère alors le produit sans dimensions :

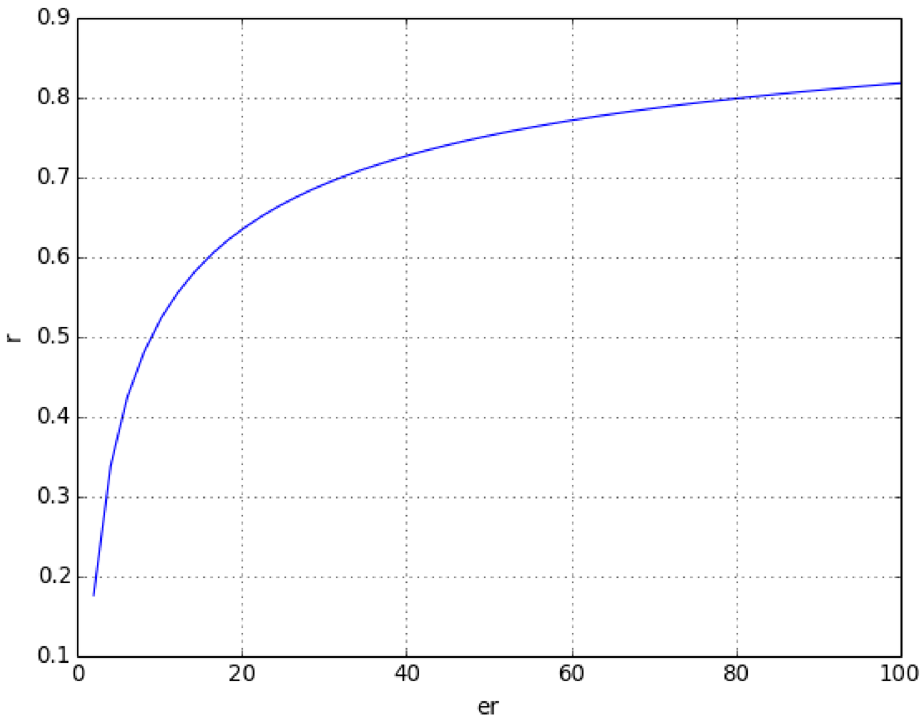
$$\delta\frac{\omega}{c}=\frac{2\pi\delta}{\lambda_0}=\sqrt{\frac{2\epsilon_0\omega}{\gamma}}$$

La simulation Réflexion sur un conducteur montre l'onde dans le métal en fonction du rapport δ/λ_0. Lorsque ce rapport tend vers zéro, le coefficient de réflexion tend vers 1.

5. Milieu diélectrique sans pertes

La conductivité étant nulle, voyons l'influence de la permittivité relative sur le coefficient de réflexion :

```
gamma=0.0
f=1.0e9
er = numpy.linspace(0,100)
r = numpy.absolute(reflexion(f,er,gamma))
figure()
plot(er,r)
xlabel("er")
ylabel("r")
grid()
```



L'impédance d'un milieu isolant ne dépend pas de la fréquence (pour ce modèle ou la permittivité est constante) donc le coefficient de réflexion est insensible à la fréquence.