

Effet de peau et effet de proximité

1. Introduction

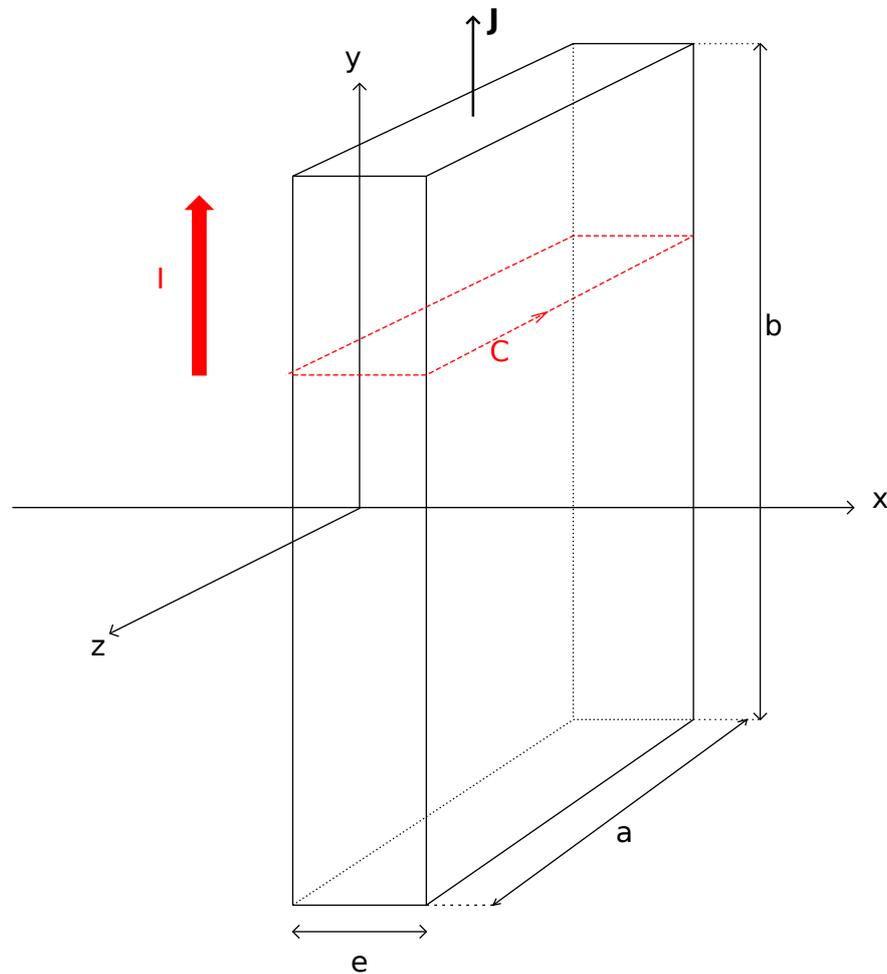
Ce document présente le calcul de la densité de courant dans une plaque, qui permet de modéliser *l'effet de peau* et la réduction de résistance électrique lorsque la fréquence augmente. On verra aussi le cas de deux plaques parallèles parcourues par des courants de même sens, qui montre *l'effet de proximité* et l'augmentation de résistance qui en résulte, puis le cas d'un système de N plaques parallèles, qui permet de modéliser sommairement la situation rencontrée dans les bobinages à plusieurs couches.

L'objectif de ce calcul est de comprendre pourquoi l'augmentation de la résistance d'une bobine avec la fréquence est beaucoup plus rapide que ce que prévoit un modèle reposant sur la résistance électrique d'un fil rectiligne seul dans l'espace.

2. Effet de peau

2.a. Géométrie et matériau

Un courant d'intensité I circule dans une plaque d'épaisseur e , de largeur a et de longueur b . Le courant circule dans le sens de la longueur. On suppose que $a \gg e$ et $b \gg e$, ce qui permet de considérer que la plaque a une largeur et une longueur infinies pour le calcul des champs. On définit un repère cartésien $(Oxyz)$: l'axe (Ox) est perpendiculaire à la plaque et ses deux faces sont situées en $x = -e/2$ et $x = e/2$. Le courant se fait dans la direction de l'axe (Oy) . Le plan (Oxz) partage la plaque en deux parties de même épaisseur et constitue un plan de symétrie du courant.



Par hypothèse, le problème est unidimensionnel : tous les champs ne dépendent que de x et du temps t . La densité de courant a donc la forme suivante :

$$\vec{J} = J_y(x, t) \vec{u}_y \quad (1)$$

L'intensité du courant à travers le rectangle $a \times e$ est :

$$I(t) = a \int_{-e/2}^{e/2} J_y(x, t) dx \quad (2)$$

Le matériau de la plaque est un métal où la loi d'Ohm s'applique, avec une conductivité électrique γ . D'un point de vue magnétique, le matériau est supposé linéaire, avec une perméabilité magnétique μ . Pour les matériaux non magnétiques comme le cuivre, cette propriété est bien vérifiée. En revanche, elle ne s'applique pas aux matériaux magnétiques durs qui présentent une courbe d'aimantation non linéaire. Pour le fer doux, elle s'applique approximativement si on est assez éloigné de la saturation magnétique. On pourra donc utiliser ce modèle pour traiter le problème du chauffage par induction d'une pièce en fer.

2.b. Mise en équation

On écrit la loi d'Ohm et les équations de Maxwell dans le métal, en négligeant le courant de déplacement dans l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\vec{J} = \gamma \vec{E} \quad (3)$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0 \quad (4)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (5)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (6)$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} \approx \mu \vec{J} \quad (7)$$

La dernière équation implique que la divergence de \vec{J} est nulle, ce qui impose d'après la loi d'Ohm que la divergence de \vec{E} est également nulle.

De ces équations, on déduit une équation aux dérivées partielles pour le champ magnétique :

$$\Delta \vec{B} = \mu \gamma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (8)$$

Les symétries du problème permettent de déterminer la direction du champ magnétique. Tout plan parallèle au plan (Oxy) est un plan de symétrie de \vec{J} (vecteur polaire) et constitue donc un plan d'antisymétrie de \vec{B} (vecteur axial). Il s'en suit que \vec{B} est perpendiculaire à ce plan :

$$\vec{B} = B_z(x, t) \vec{u}_z \quad (9)$$

L'équation aux dérivées partielles s'écrit donc :

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} = \mu \gamma \frac{\partial B_z}{\partial t} \quad (10)$$

La fonction $J_z(x, t)$ obéit à la même équation mais il est plus simple de déterminer d'abord \vec{B} puis d'en déduire la densité de courant en calculant le rotationnel de \vec{B} :

$$J_y = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial B_z}{\partial x} \quad (11)$$

On se place en régime sinusoïdal de pulsation ω . Tous les champs sont complexes et proportionnels à $e^{i\omega t}$. L'équation à résoudre est alors :

$$\frac{d^2 B_z}{dx^2} = i\omega \mu \gamma B_z \quad (12)$$

Dans l'air qui entoure la plaque, le rotationnel de \vec{B} est nul (car on a négligé le courant de déplacement), ce qui s'écrit :

$$\frac{dB_z}{dx} = 0 \quad (13)$$

Le champ B_z est donc uniforme de chaque côté de la plaque. Bien sûr, cette propriété n'est valable qu'à une distance de la plaque où l'approximation du régime quasi stationnaire s'applique (par ex. 300 m pour 100 kHz).

Précisons que pour un matériau magnétique B_z n'est pas continu à l'interface métal-air. On a en continuité de l'excitation magnétique $H = B/\mu$, ce qui s'écrit, par exemple en $x = e/2$:

$$\frac{B_z^{\text{metal}}(e/2)}{\mu} = \frac{B_z^{\text{air}}(e/2)}{\mu_0} \quad (14)$$

2.c. Résolution

Considérons tout d'abord le champ $B_z(x)$ dans l'air qui entoure la plaque. Il s'agit du champ magnétique créé dans l'air par le courant circulant dans la plaque. Ce champ possède une propriété d'antisymétrie qui résulte du fait que la densité de courant $J_y(x)$ ne dépend que de x . Pour le démontrer, considérons une tranche de la plaque comprise entre x et $x + dx$. Cette tranche est parcourue par un courant quasi uniforme donc, pour des raisons de symétrie, produit dans l'espace un champ \vec{B} antisymétrique par rapport à elle-même. Le champ généré dans l'espace autour de la plaque est la somme des champs créés par ses tranches et par conséquent ce champ possède bien une antisymétrie par rapport au plan (Oyz) , c'est-à-dire que le champ créé d'un côté de la plaque est l'opposé du champ créé de l'autre côté. Il faut remarquer que cette propriété est vraie même si la distribution de courant ne possède aucune symétrie par rapport au plan (Oyz) . Cependant, cette propriété n'est évidemment pas vraie en général dans le métal. Le fait que le champ magnétique à l'extérieur ne dépend pas de la répartition du courant dans la plaque en fonction de x est une propriété remarquable de ce modèle de plaque infinie, qui rend possible le calcul de ce champ *a priori* sans connaissance de la distribution du courant (qui est justement ce qu'on cherche). Cette propriété ne se retrouverait pas si la largeur a était finie.

Nous avons donc :

$$B_z^{\text{air}}(-e/2) = B_a \quad (15)$$

$$B_z^{\text{air}}(e/2) = -B_a \quad (16)$$

D'après la relation de continuité (2.b.), on en déduit :

$$B_z^{\text{metal}}(-e/2) = B_0 \quad (17)$$

$$B_z^{\text{metal}}(e/2) = -B_0 \quad (18)$$

Pour déterminer la constante B_0 , appliquons le théorème d'Ampère dans la plaque :

$$\oint_C \vec{B} \cdot \vec{t} dl = \mu I \quad (19)$$

pour le rectangle $e \times a$ qui délimite la surface traversée par l'intensité I (représenté en rouge sur la figure). Nous obtenons :

$$B_0 = \frac{\mu I}{2a} \quad (20)$$

Posons $k^2 = i\omega\mu\gamma$, ce qui implique :

$$k = \pm \frac{1+i}{\delta} \quad (21)$$

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\gamma}} \quad (22)$$

La solution générale de l'équation (12) est :

$$B_z(x) = B_1 e^{ikx} + B_2 e^{-ikx} \quad (23)$$

avec

$$k = \frac{1+i}{\delta} \quad (24)$$

Écrivons les conditions limites sur les faces de la plaque :

$$B_1 e^{k\frac{e}{2}} + B_2 e^{-k\frac{e}{2}} = -B_0 \quad (25)$$

$$B_1 e^{-k\frac{e}{2}} + B_2 e^{k\frac{e}{2}} = B_0 \quad (26)$$

On obtient ainsi :

$$B_2 = -B_1 = \frac{B_0}{2\sinh\left(\frac{ke}{2}\right)} \quad (27)$$

où on a introduit la fonction sinus hyperbolique (à variable complexe).

Finalement, l'expression du champ magnétique dans la plaque est :

$$B_z(x) = -B_0 \frac{\sinh(kx)}{\sinh\left(\frac{ke}{2}\right)} \quad (28)$$

Au moyen de la relation (11), on obtient :

$$J_y(x) = \frac{Ik \cosh(kx)}{2a \sinh\left(\frac{ke}{2}\right)} = \frac{I(1+i) \cosh\left(\frac{(1+i)x}{\delta}\right)}{2a\delta \sinh\left(\frac{(1+i)e}{2\delta}\right)} \quad (29)$$

Cette densité de courant doit être comparée à celle qu'on a en courant continu (DC) :

$$J_y^{DC} = \frac{I}{ae} \quad (30)$$

Le rapport s'écrit :

$$\frac{J_y(x)}{J_y^{DC}} = \frac{(1+i)e \cosh(kx)}{2\delta \sinh\left(\frac{ke}{2}\right)} = \frac{(1+i)e \cosh\left(\frac{(1+i)x}{\delta}\right)}{2\delta \sinh\left(\frac{(1+i)e}{2\delta}\right)} \quad (31)$$

Traçons le module de ce rapport en fonction de x/δ , pour différentes valeurs de e/δ :

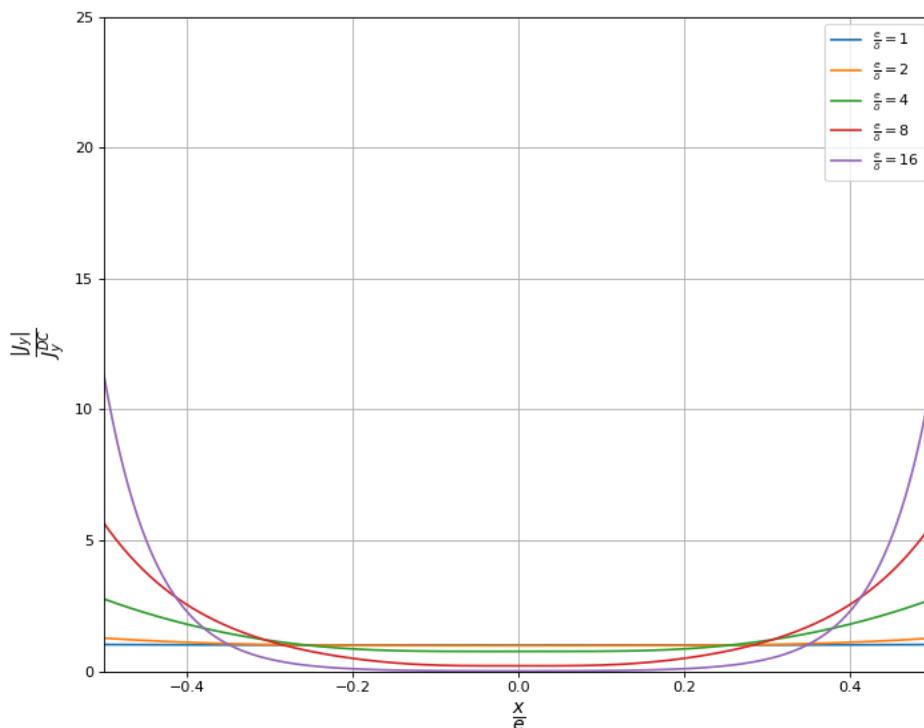
```
import numpy as np
from matplotlib.pyplot import *

def rapportJ(x,u):
    # u = e/delta
    return (1+1j)*u/2*np.cosh((1+1j)*u*x)/np.sinh((1+1j)*u/2)
```

```

x= np.linspace(-0.5,0.5,1000)
figure(figsize=(10,8))
plot(x,np.absolute(rapportJ(x,1)),label=r'$\frac{e}{\delta}=1$')
plot(x,np.absolute(rapportJ(x,2)),label=r'$\frac{e}{\delta}=2$')
plot(x,np.absolute(rapportJ(x,4)),label=r'$\frac{e}{\delta}=4$')
plot(x,np.absolute(rapportJ(x,8)),label=r'$\frac{e}{\delta}=8$')
plot(x,np.absolute(rapportJ(x,16)),label=r'$\frac{e}{\delta}=16$')
grid()
legend(loc='upper right')
xlabel(r"$\frac{x}{e}$",fontsize=18)
ylabel(r"$\frac{|J_y|}{J_y^{DC}}$",fontsize=18)
ylim(0,25)
xlim(-0.5,0.5)

```



Plus e/δ est grand, plus le courant se concentre au voisinage de la surface de la plaque. Si $e = \delta$, la densité de courant est pratiquement uniforme. Pour une plaque donnée, une augmentation de la fréquence fait diminuer δ et le courant se localise de plus en plus vers la surface. Pour $e = 16\delta$, la densité de courant est quasi nulle sur 1/3 de l'épaisseur de la plaque, ce qui signifie qu'il est inutile d'avoir une plaque aussi épaisse pour faire passer le courant d'intensité I . Cela signifie aussi que la résistance est nettement plus petite que la résistance en courant continu (résistance DC) car le courant se concentre sur une surface plus petite.

La puissance moyenne dissipée dans la portion de conducteur considérée est :

$$P_D = \int_{-e/2}^{e/2} \int_0^b \int_0^a \frac{1}{2} \vec{J} \cdot \vec{E}^* dx dy dz = \frac{ab}{2\gamma} \int_{-e/2}^{e/2} |J_y(x)|^2 dx \quad (32)$$

Pour une intensité I donnée, la puissance dissipée sera clairement plus grande si l'effet de

peau est plus prononcé car le module au carré de la densité de courant est alors très élevé au voisinage des surfaces.

Afin de calculer le module au carré de J_y (expression (29)), considérons le module au carré du cosinus hyperbolique :

$$\begin{aligned} |\cosh(z)|^2 &= \frac{1}{4}(e^z + e^{-z})(e^{z^*} + e^{-z^*}) \\ &= \frac{1}{4}(e^{z+z^*} + e^{-(z+z^*)} + e^{z-z^*} + e^{z^*-z}) \\ &= \frac{1}{2}(\cosh(2\operatorname{Re}(z)) + \cos(2\operatorname{Im}(z))) \end{aligned}$$

Un calcul similaire conduit à :

$$|\sinh(z)|^2 = \frac{1}{2}(\cosh(2\operatorname{Re}(z)) - \cos(2\operatorname{Im}(z))) \quad (33)$$

Le module au carré de la densité de courant s'écrit donc :

$$|J_y(x)|^2 = \frac{I^2}{2a^2\delta^2} \frac{\cosh(\frac{2x}{\delta}) + \cos(\frac{2x}{\delta})}{\cosh(\frac{e}{\delta}) - \cos(\frac{e}{\delta})} \quad (34)$$

Après intégration, nous obtenons pour la puissance moyenne dissipée :

$$P_D = \frac{1}{2} \frac{bI^2}{2a\delta\gamma} \frac{\sinh(\frac{e}{\delta}) + \sin(\frac{e}{\delta})}{\cosh(\frac{e}{\delta}) - \cos(\frac{e}{\delta})} \quad (35)$$

La puissance moyenne dissipée s'exprime en fonction de la résistance R de la portion de conducteur considérée :

$$P_D = \frac{1}{2} RI^2 \quad (36)$$

L'expression de la résistance s'en déduit :

$$R = \frac{b}{2a\delta\gamma} \frac{\sinh(\frac{e}{\delta}) + \sin(\frac{e}{\delta})}{\cosh(\frac{e}{\delta}) - \cos(\frac{e}{\delta})} \quad (37)$$

Cette résistance doit être comparée à la résistance en courant continu :

$$R^{DC} = \frac{b}{\gamma a e} \quad (38)$$

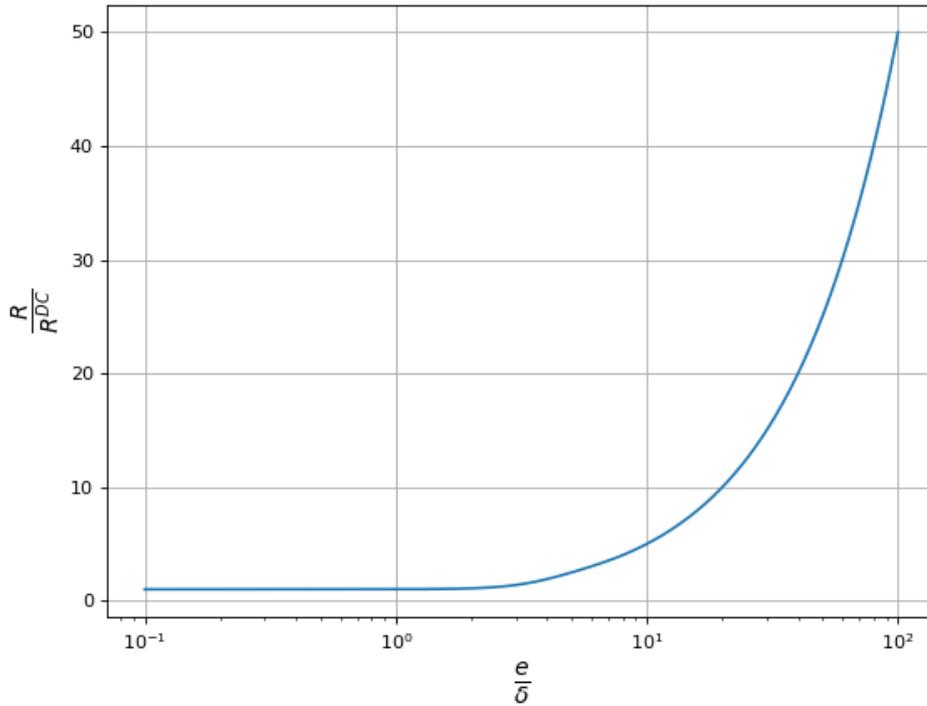
Le rapport des deux est :

$$K = \frac{R}{R^{DC}} = \frac{e}{2\delta} \frac{\sinh(\frac{e}{\delta}) + \sin(\frac{e}{\delta})}{\cosh(\frac{e}{\delta}) - \cos(\frac{e}{\delta})} \quad (39)$$

Voici le tracé de ce rapport en fonction de e/δ :

```
u = np.logspace(-1, 2, 1000)
K1 = u/2*(np.sinh(u)+np.sin(u))/(np.cosh(u)-np.cos(u))
figure(figsize=(8, 6))
plot(u, K1)
xlabel(r"$\frac{e}{\delta}$", fontsize=18)
```

```
ylabel(r"$\frac{R}{R^{DC}}$", fontsize=18)
grid()
xscale('log')
```



Cette courbe montre que la résistance reste égale la résistance DC tant que $e/\delta < 2$. Elle est 10 fois plus grande que la résistance DC lorsque $e/\delta = 20$. La courbe de variation de résistance pour un fil de section circulaire de rayon a est montrée dans [Effet de peau dans un fil rectiligne](#). Étonnamment, les deux courbes (plaque et fil) sont très voisines si on remplace l'épaisseur e de la plaque par le rayon a du fil (et non pas son diamètre).

Pour une fréquence d'utilisation donnée, la valeur de δ est calculée par la relation (22). La courbe précédente permet de déterminer l'épaisseur maximale qui permette de conserver la résistance DC.

Pour un matériau magnétique comme le fer, la valeur de δ est beaucoup plus faible que pour le cuivre à même fréquence (même si sa conductivité est moins grande). Il s'en suit que l'effet de peau est beaucoup plus prononcé.

Une autre grandeur intéressante est l'énergie magnétique moyenne stockée dans la plaque :

$$E_m = \int_{-e/2}^{e/2} \int_0^b \int_0^a \frac{1}{2\mu} \vec{B} \cdot \vec{B}^* dx dy dz = \frac{ab}{2\mu} \int_{-e/2}^{e/2} |B_z(x)|^2 dx \quad (40)$$

Le calcul est similaire à celui de la puissance dissipée et conduit à

$$E_m = \frac{b\mu\delta}{8a} I^2 \frac{\sinh(\frac{e}{\delta}) - \sin(\frac{e}{\delta})}{\cosh(\frac{e}{\delta}) - \cos(\frac{e}{\delta})} \quad (41)$$

L'énergie magnétique moyenne est liée au coefficient d'auto-inductance L de la plaque :

$$E_m = \frac{1}{2} LI^2 \quad (42)$$

On en déduit l'expression de l'auto-inductance :

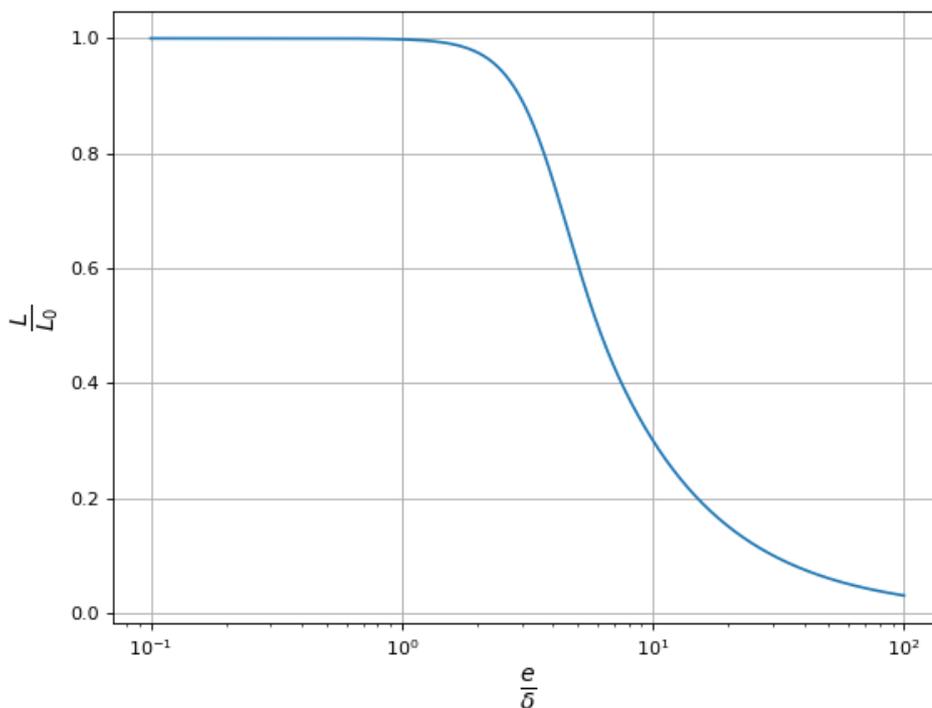
$$L = \frac{be\mu}{4a} \frac{\delta}{e} \frac{\sinh(\frac{e}{\delta}) - \sin(\frac{e}{\delta})}{\cosh(\frac{e}{\delta}) - \cos(\frac{e}{\delta})} \quad (43)$$

Cette auto-inductance dépend de la fréquence à cause de la variation de δ avec la fréquence. Il faut remarquer que cette auto-inductance ne prend en compte que le champ magnétique à l'intérieur de la plaque. Il y a bien sûr une auto-inductance associée au champ à l'extérieur, qui est indépendante de la fréquence puisque le champ à l'extérieur ne dépend pas de la fréquence. Pour obtenir une représentation graphique de cette auto-inductance, posons :

$$L_0 = \frac{be\mu}{12a} \quad (44)$$

et traçons L/L_0 en fonction de e/δ :

```
L = 3/u*(np.sinh(u)-np.sin(u))/(np.cosh(u)-np.cos(u))
figure(figsize=(8,6))
plot(u,L)
xlabel(r"$\frac{e}{\delta}$", fontsize=18)
ylabel(r"$\frac{L}{L_0}$", fontsize=18)
grid()
xscale('log')
```



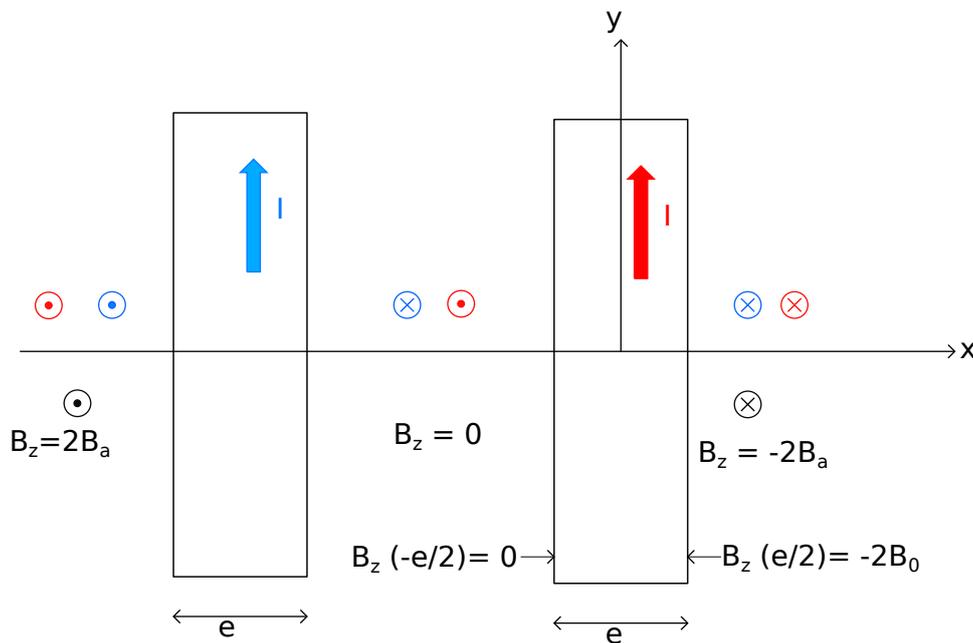
L'ordre de grandeur de L_0 peut être évalué avec $e = 1$ mm, $a = 10$ mm et $b = 10$ m. Pour un matériau non magnétique, on obtient L_0 de l'ordre du microhenry. La diminution de cette auto-inductance (qui s'ajoute à celle associée au champ créé dans l'air) a donc de bonnes chances de passer inaperçue. En revanche, pour un matériau magnétique, elle pourrait ne pas être négligeable.

3. Effet de proximité

3.a. Deux plaques parallèles

L'effet de proximité est l'effet sur un conducteur d'un ou de plusieurs autres conducteurs situés à proximité, avec un courant circulant dans le même sens ou en sens inverse. Il est très difficile à modéliser car il dépend du nombre de conducteurs en présence, de leur géométrie et de la distance qui les sépare.

Le modèle de la plaque infinie permet une première approche de ce phénomène. Pour cela, considérons deux plaques parcourues chacune par le même courant, de même direction, de même sens et de même intensité.



La simplicité de ce modèle repose sur son caractère unidimensionnel (en régime dépendant du temps, cette propriété ne peut pas être strictement vérifiée). Chaque plaque produit dans l'espace un champ magnétique \vec{B} uniforme de chaque côté de la plaque. Ce champ est antisymétrique par rapport au plan médian de la plaque et B_z se calcule aisément avec le théorème d'Ampère comme montré dans le calcul de l'effet de peau présenté plus haut. Son intensité est :

$$B_a = \frac{\mu_0 I}{2a} \quad (45)$$

Sur la figure ci-dessus, les champs magnétiques créés par chacune des deux plaques dans les trois régions de l'espace vide sont représentés, ainsi que leur somme.

Le champ magnétique B_z dans une plaque sur ses faces s'en déduit par continuité de l'excitation magnétique $H = B/\mu$. Par exemple, pour la plaque de droite :

$$\frac{B_z(e/2)}{\mu} = -\frac{2B_a}{\mu_0} \quad (46)$$

ce qui conduit à :

$$B_z(e/2) = -2B_0 \quad (47)$$

avec :

$$B_0 = \frac{\mu I}{2a} \quad (48)$$

Intéressons-nous à la plaque placée à droite, à laquelle est associé le repère $(Oxyz)$. La situation est similaire (symétrique) pour l'autre plaque.

La résolution est similaire à celle présentée plus haut pour l'effet de peau dans une plaque. Le champ magnétique dans la plaque s'écrit :

$$B_z(x) = B_1 e^{ikx} + B_2 e^{-ikx} \quad (49)$$

La différence vient des conditions limites, qui s'écrivent à présent :

$$B_z(-e/2) = 0 \quad (50)$$

$$B_z(e/2) = -2B_0 \quad (51)$$

Le champ magnétique dans la plaque est :

$$B_z(x) = -2B_0 \frac{\sinh(k(\frac{e}{2} + x))}{\sinh(ke)} \quad (52)$$

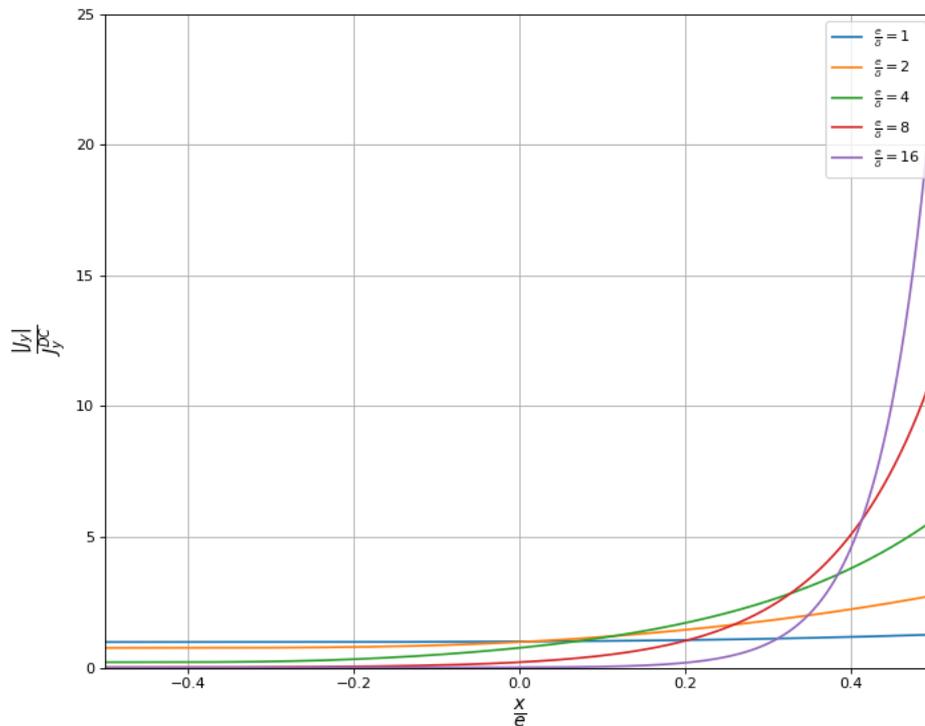
La densité de courant dans la plaque :

$$J_y(x) = \frac{I}{a} k \frac{\cosh(k(\frac{e}{2} + x))}{\sinh(ke)} \quad (53)$$

Le rapport de cette densité sur celle en courant continu (DC) :

$$\frac{J_y(x)}{J_y^{DC}} = \frac{(1+i)e}{\delta} \frac{\cosh\left((1+i)\frac{e}{\delta}\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{e}\right)\right)}{\sinh\left((1+i)\frac{e}{\delta}\right)} \quad (54)$$

```
def rapportJ(x,u):
    # u = e/delta
    return (1+1j)*u*np.cosh((1+1j)*u*(0.5+x))/np.sinh((1+1j)*u)
x= np.linspace(-0.5,0.5,1000)
figure(figsize=(10,8))
plot(x,np.absolute(rapportJ(x,1)),label=r'$\frac{e}{\delta}=1$')
plot(x,np.absolute(rapportJ(x,2)),label=r'$\frac{e}{\delta}=2$')
plot(x,np.absolute(rapportJ(x,4)),label=r'$\frac{e}{\delta}=4$')
plot(x,np.absolute(rapportJ(x,8)),label=r'$\frac{e}{\delta}=8$')
plot(x,np.absolute(rapportJ(x,16)),label=r'$\frac{e}{\delta}=16$')
grid()
legend(loc='upper right')
xlabel(r'$\frac{x}{e}$',fontsize=18)
ylabel(r'$\frac{|J_y|}{J_y^{DC}}$',fontsize=18)
ylim(0,25)
xlim(-0.5,0.5)
```

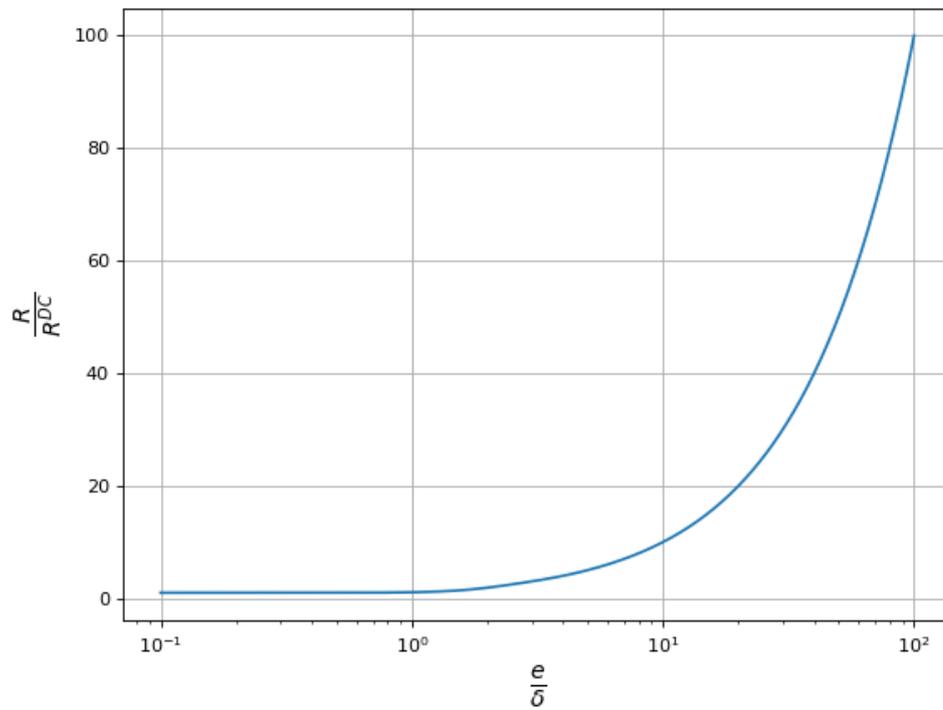


La présence de l'autre plaque (à gauche) a pour effet de réduire la densité de courant du côté correspondant. La densité de courant de l'autre côté est considérablement augmentée. Il faut comparer cette distribution du courant à celle obtenue plus haut pour une seule plaque (le graphique est à la même échelle). Si le courant se concentre au voisinage d'une face, la densité atteinte est deux fois plus grande que s'il se concentre au voisinage des deux faces.

Le calcul de la puissance dissipée puis de la résistance se fait comme précédemment. Nous obtenons l'expression suivante du rapport entre la résistance et la résistance en courant continu (DC) :

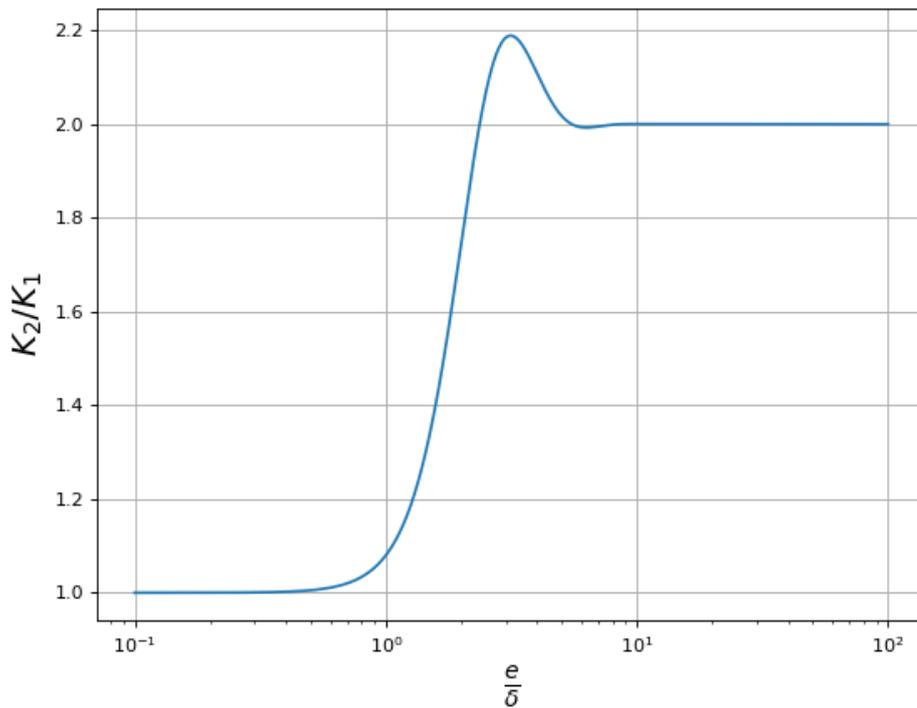
$$K = \frac{R}{R^{DC}} = \frac{e \sinh\left(\frac{2e}{\delta}\right) + \sin\left(\frac{2e}{\delta}\right)}{\delta \cosh\left(\frac{2e}{\delta}\right) - \cos\left(\frac{2e}{\delta}\right)} \quad (55)$$

```
u = np.logspace(-1,2,1000)
K2 = u*(np.sinh(2*u)+np.sin(2*u))/(np.cosh(2*u)-np.cos(2*u))
figure(figsize=(8,6))
plot(u,K2)
xlabel(r"$\frac{e}{\delta}$", fontsize=18)
ylabel(r"$\frac{R}{R^{DC}}$", fontsize=18)
grid()
xscale('log')
```



Voici une comparaison du rapport de résistance entre le modèle avec une plaque et le modèle à deux plaques.

```
figure(figsize=(8, 6))
plot(u, K2/K1)
xlabel(r"$\frac{e}{\delta}$", fontsize=18)
ylabel(r"$K_2/K_1$", fontsize=18)
grid()
xscale('log')
```



Les valeurs de rapport de résistance sont plus grandes que celles obtenues pour une plaque. À haute fréquence, la résistance est deux fois plus grande que celle prédite par le modèle à une plaque. Cette augmentation constitue justement ce qu'on appelle *effet de proximité*, mais l'effet qui est observé dans les bobinages est beaucoup plus grand qu'un facteur 2.

3.b. Modèle à N plaques

Pour s'approcher de la situation rencontrée dans les bobinages à plusieurs couches, où un fil est entouré de plusieurs fils parcourus par un courant dans le même sens, un modèle de N plaques parallèles semble intéressant. Ce problème est plus complexe que le précédent car les N plaques ne sont pas toutes équivalentes. Dans ce cas, il s'agit d'évaluer la puissance dissipée dans l'ensemble des N plaques et de la comparer à celle qui serait dissipée en courant continu (pour la même intensité I).

Le champ magnétique dans chaque plaque a toujours la forme suivante :

$$B_z(x) = B_1 e^{ikx} + B_2 e^{-ikx} \quad (56)$$

où le repère utilisé est propre à chaque plaque, avec l'origine située en son centre. Les conditions limites sont différentes pour chaque plaque. Elles prennent la forme générale suivante :

$$B_z(-e/2) = \alpha B_0 \quad (57)$$

$$B_z(e/2) = \beta B_0 \quad (58)$$

Par exemple pour deux plaques, on a $(\alpha, \beta) = (2, 0)$ pour la plaque de gauche et $(\alpha, \beta) = (0, -2)$ pour la plaque de droite.

Il est intéressant de faire la résolution avec une variable d'espace sans dimensions :

$$x' = \frac{x}{e} \quad (59)$$

L'équation différentielle s'écrit alors :

$$\frac{d^2 B_z}{dx'^2} = i\omega\mu\gamma e^2 B_z \quad (60)$$

En introduisant la profondeur de pénétration donnée par la relation (22), l'équation s'écrit :

$$\frac{d^2 B_z}{dx'^2} = 2i \left(\frac{e}{\delta}\right)^2 B_z \quad (61)$$

On posera $u = e/\delta$.

Le calcul de la densité de courant se fait par :

$$J_y(x) = -\frac{1}{\mu e} \frac{dB_z}{dx'} \quad (62)$$

On s'intéresse au rapport de cette densité par celle en courant continu :

$$r(x) = \frac{J_y}{J_y^{DC}} = \frac{ae}{I} J_y = -\frac{a}{\mu I} \frac{dB_z}{dx'} \quad (63)$$

On peut donc introduire le champ magnétique sans dimensions défini par la relation suivante :

$$B'_z = \frac{aB_z}{\mu I} \quad (64)$$

qui vérifie la même équation différentielle que $B_z(x)$. On a alors :

$$B'_0 = \frac{1}{2} \quad (65)$$

$$r(x) = -\frac{dB'_z}{dx'} \quad (66)$$

Le rapport $r(x)$ permet de calculer directement le rapport des résistances :

$$\frac{R}{R^{DC}} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |r(x')|^2 dx' \quad (67)$$

L'application des conditions limites conduit au résultat suivant :

$$B'_z(x) = \frac{1}{2(e^{-ke} - e^{ke})} \left((\alpha e^{-\frac{ke}{2}} - \beta e^{-\frac{ke}{2}}) e^{kx} + (\beta e^{-\frac{ke}{2}} - \alpha e^{-\frac{ke}{2}}) e^{-kx} \right) \quad (68)$$

Pour l'écrire explicitement en fonction de u et x' , posons $m = 1 + i$:

$$B'_z(x') = \frac{1}{2(e^{-mu} - e^{mu})} \left((\alpha e^{-\frac{mu}{2}} - \beta e^{-\frac{mu}{2}}) e^{mux'} + (\beta e^{-\frac{mu}{2}} - \alpha e^{-\frac{mu}{2}}) e^{-mux'} \right) \quad (69)$$

Le rapport des densités de courant s'en déduit par dérivation :

$$r(x') = \frac{mu}{2(e^{mu} - e^{-mu})} \left((\alpha e^{-\frac{mu}{2}} - \beta e^{-\frac{mu}{2}}) e^{mux'} - (\beta e^{-\frac{mu}{2}} - \alpha e^{-\frac{mu}{2}}) e^{-mux'} \right) \quad (70)$$

Le calcul analytique du module au carré de r est trop complexe. Nous ferons donc le calcul de l'intégrale (67) de manière numérique, par la méthode des rectangles.

Considérons à présent les conditions limites pour chacune des N plaques, repérées par un indice p variant de 0 à $N - 1$. Il faut trouver les conditions limites de B'_z pour la plaque p . Chaque plaque génère à sa gauche un champ $B'_0 = 1/2$ et à sa droite un champ $-B'_0$ (il s'agit des valeurs sur la surface et dans le métal). Pour la plaque numéro p , il y a p plaques à gauche et $N - p - 1$ plaques à droite. Les conditions limites pour cette plaque sont donc :

$$B'_z(x' = -\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}(N - p) \quad (71)$$

$$B'_z(x' = \frac{1}{2}) = B'_z(-\frac{1}{2}) - 1 \quad (72)$$

On a donc pour la plaque p :

$$\alpha = N - 2p \quad (73)$$

$$\beta = N - 2p - 2 \quad (74)$$

Les fonctions suivantes calculent le champ magnétique et le rapport des densités de courant dans une plaque :

```
def Bz(alpha,beta,u,x):
    m = (1+1j)
    v=m*u
    return 0.5/(np.exp(v)-np.exp(-v))*((alpha*np.exp(-v/2)-beta*np.exp(v/2))*np.exp(v*x))

def rapportJ(alpha,beta,u,x):
    m = (1+1j)
    v=m*u
    return 0.5*v/(np.exp(v)-np.exp(-v))*((alpha*np.exp(-v/2)-beta*np.exp(v/2))*np.exp(v*x))
```

La fonction suivante calcule le rapport des résistances :

```
def rapportR(alpha,beta,u):
    x = np.linspace(-0.5,0.5,1000)
    r2 = np.absolute(rapportJ(alpha,beta,u,x))**2
    dx = x[1]-x[0]
    r2 = r2[0:len(r2)-1]
    K = r2.sum()*dx
    return K
```

Chaque plaque a son propre rapport de résistance. On calcule la moyenne de ces rapports pour l'ensemble des N plaques :

```
def rapportR_Nplaques(N,u):
    Km = 0
```

```

for p in range(N):
    alpha = N-2*p
    beta = alpha-2
    Km += rapportR(alpha,beta,u)
return Km/N

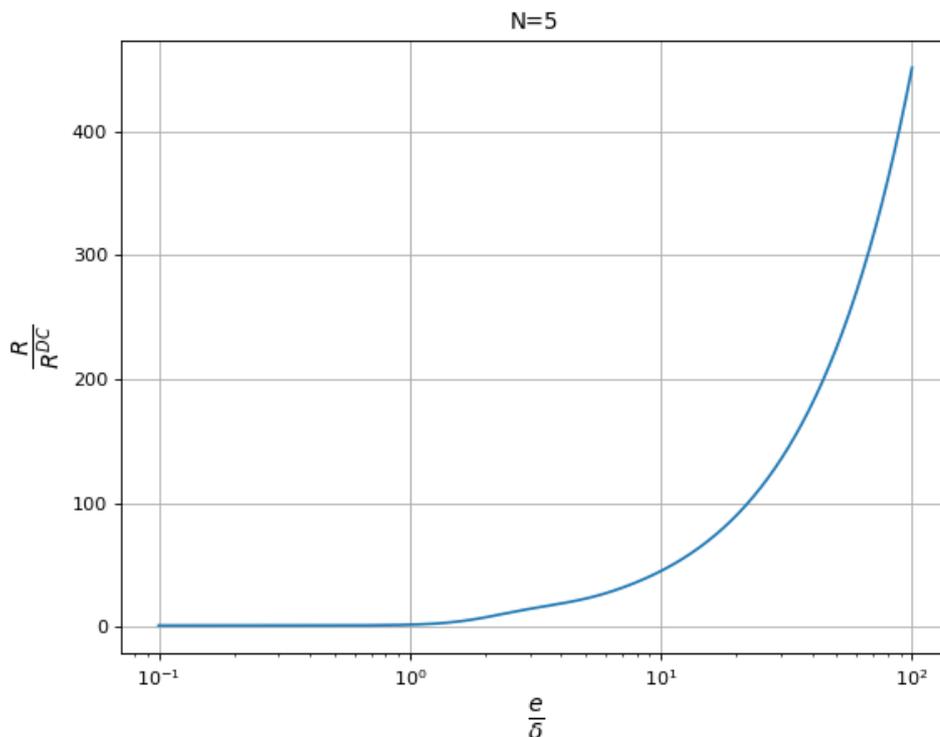
```

Pour 5 plaques, voici le rapport des résistances en fonction de e/δ :

```

N=5
tab_u = np.logspace(-1,2,1000)
K5 = np.zeros(len(tab_u))
for i in range(len(tab_u)):
    K5[i] = rapportR_Nplaques(N,tab_u[i])
figure(figsize=(8,6))
plot(tab_u,K5)
xlabel(r"$\frac{e}{\delta}$", fontsize=18)
ylabel(r"$\frac{R}{R^{DC}}$", fontsize=18)
grid()
xscale('log')
title('N=5')

```



L'augmentation de résistance est beaucoup plus forte que pour 2 plaques. Voyons les courbes du module de la densité de courant dans les plaques, pour une valeur donnée de u :

```

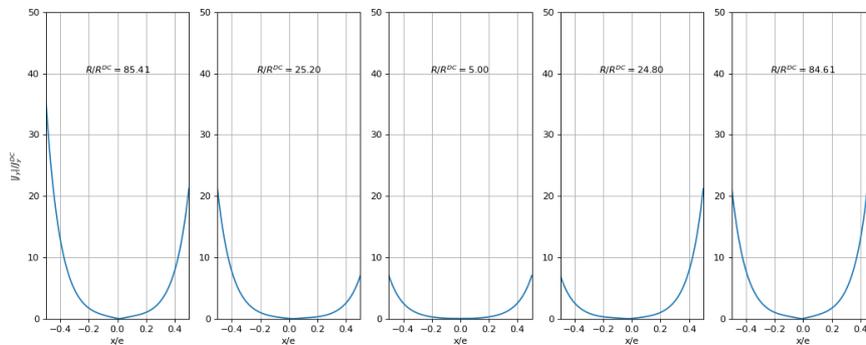
u = 10
x = np.linspace(-0.5,0.5,1000)
figure(figsize=(16,6))

```

```

for p in range(N):
    alpha = N-2*p
    beta = alpha-2
    r = rapportJ(alpha,beta,u,x)
    subplot(151+p)
    K = rapportR(alpha,beta,u)
    plot(x,np.absolute(r))
    grid()
    xlim(-0.5,0.5)
    ylim(0,50)
    xlabel('x/e')
    if p==0: ylabel(r'$|J_y|/J_y^{DC}$')
    text(0,40,r"$R/R^{DC}=%0.2f$" %K,ha='center')

```

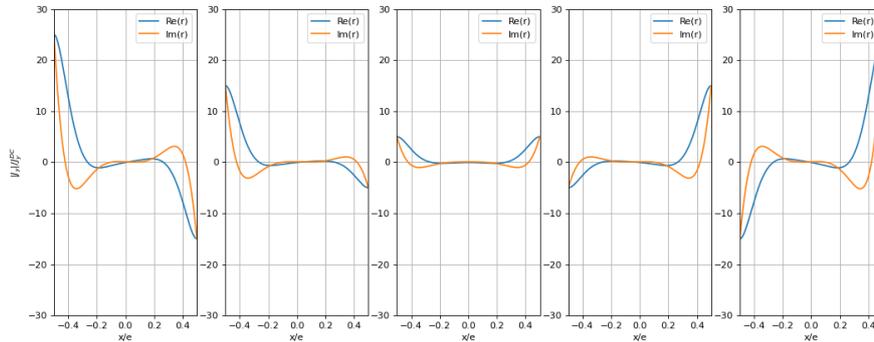


Les deux plaques situées au bord du système (plaques 0 et 4) sont les plus affectées par l'augmentation de résistance car la variation de densité de courant est plus forte dans ces plaques. Il peut sembler étrange que le module de r atteigne des valeurs aussi élevées, alors que l'intégrale de r sur x est égale à 1. Pour comprendre ce phénomène, il faut tracer la partie réelle et la partie imaginaire :

```

u = 10
x = np.linspace(-0.5,0.5,1000)
figure(figsize=(16,6))
for p in range(N):
    alpha = N-2*p
    beta = alpha-2
    r = rapportJ(alpha,beta,u,x)
    subplot(151+p)
    K = rapportR(alpha,beta,u)
    plot(x,np.real(r),label='Re (r)')
    plot(x,np.imag(r),label='Im (r)')
    grid()
    xlim(-0.5,0.5)
    ylim(-30,30)
    xlabel('x/e')
    if p==0: ylabel(r'$|J_y|/J_y^{DC}$')
    legend(loc='upper right')

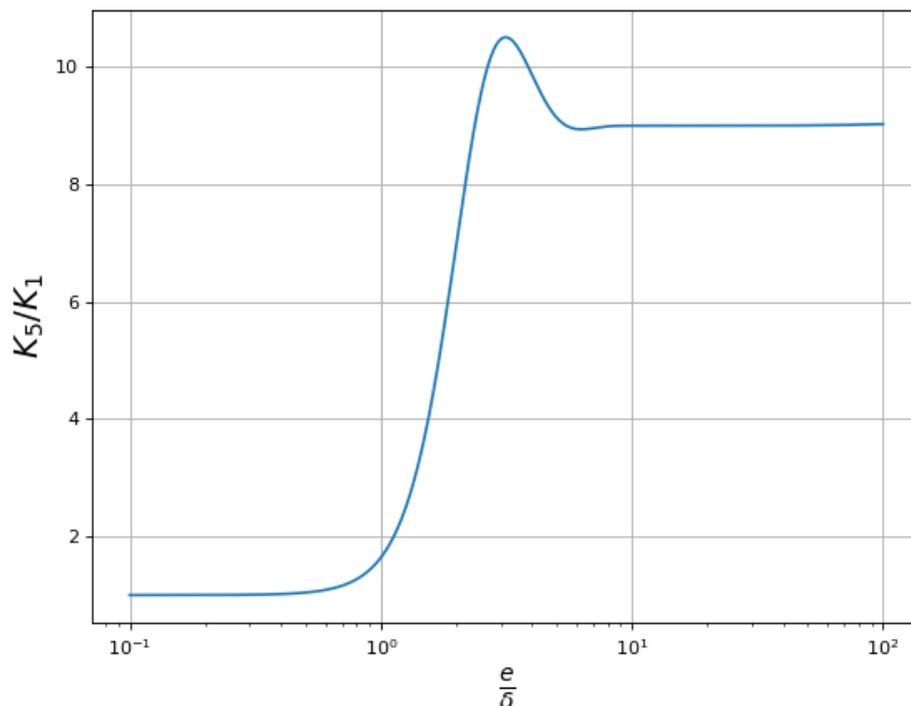
```



Dans la plaque 0, où le module de r atteint les plus grandes valeurs, on voit que l'intégrale de la partie réelle change de signe d'un côté à l'autre de la plaque. Il en est de même de la partie imaginaire. Cela explique pourquoi l'intégrale de r , qui est bien égale à 1, est beaucoup plus petite que l'intégrale du module de r .

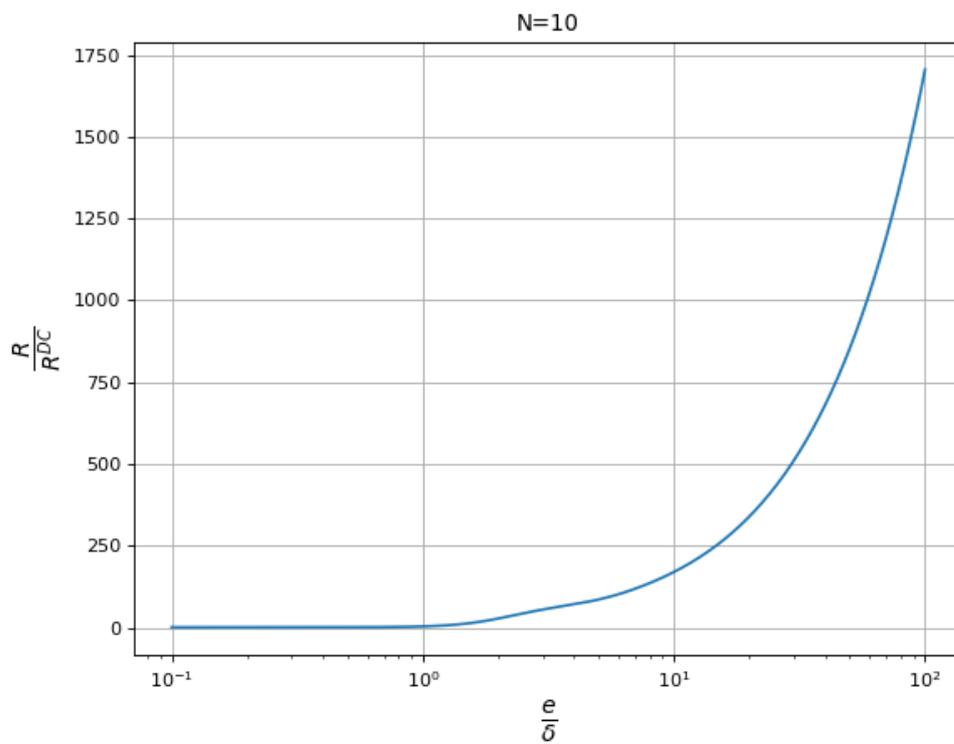
Il est intéressant de comparer le rapport de résistances à celui d'une seule plaque :

```
figure(figsize=(8,6))
plot(tab_u,K5/K1)
xlabel(r"$\frac{e}{\delta}$", fontsize=18)
ylabel(r"$K_5/K_1$", fontsize=18)
grid()
xscale('log')
```

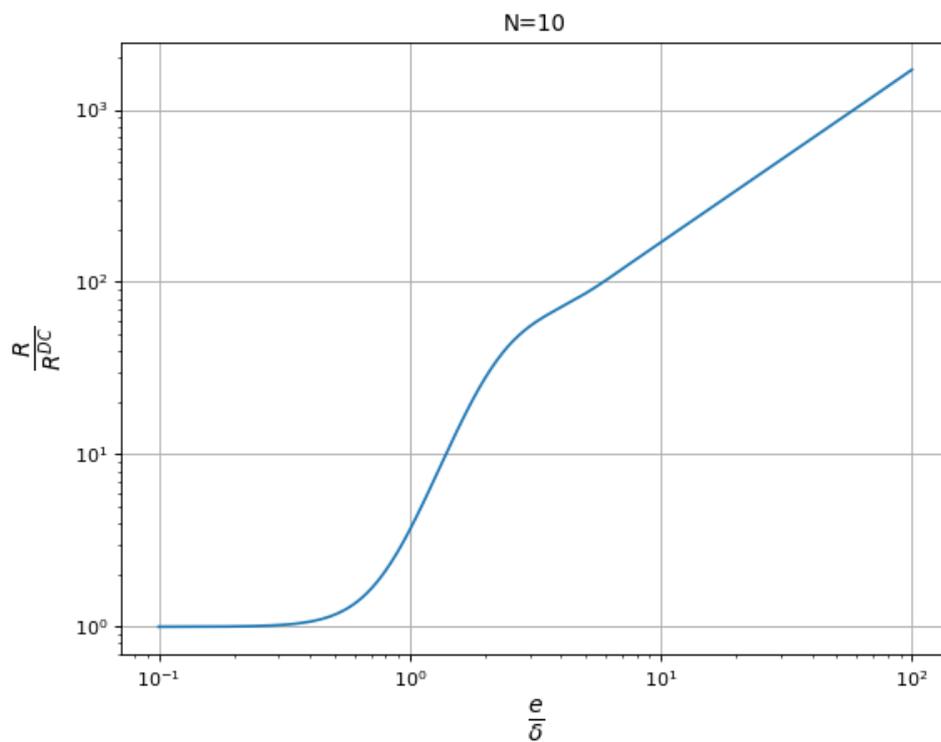


À haute fréquence, la résistance est 9 fois plus grande que la résistance d'une seule plaque. Voici les résultats pour 10 plaques :

```
N=10
tab_u = np.logspace(-1,2,500)
K10 = np.zeros(len(tab_u))
for i in range(len(tab_u)):
    K10[i] = rapportR_Nplaques(N,tab_u[i])
figure(figsize=(8,6))
plot(tab_u,K10)
xlabel(r"$\frac{e}{\delta}$", fontsize=18)
ylabel(r"$\frac{R}{R^{DC}}$", fontsize=18)
grid()
xscale('log')
title('N=10')
```



```
yscale('log')
```

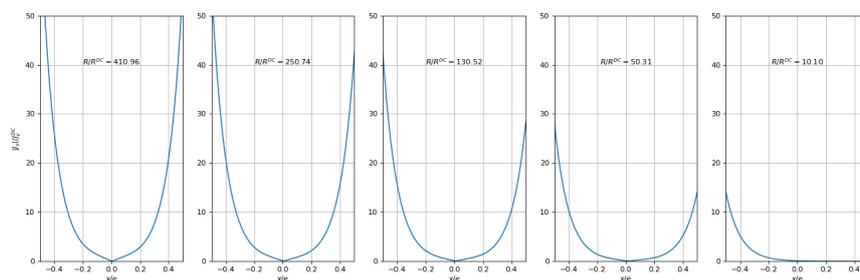


On représente le module de la densité de courant sur les 5 premières plaques :

```

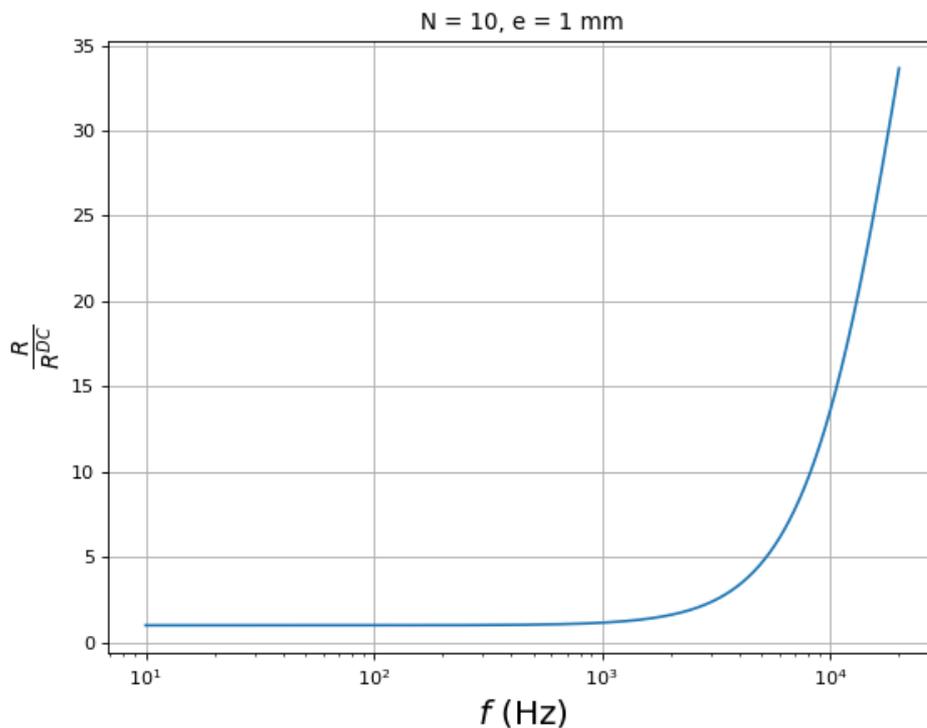
u = 10
x = np.linspace(-0.5,0.5,1000)
figure(figsize=(20,6))
for p in range(N//2):
    alpha = N-2*p
    beta = alpha-2
    r = rapportJ(alpha,beta,u,x)
    subplot(151+p)
    K = rapportR(alpha,beta,u)
    plot(x,np.absolute(r))
    grid()
    xlim(-0.5,0.5)
    ylim(0,50)
    xlabel('x/e')
    if p==0: ylabel(r'$|J_y|/J_y^{DC}$')
    text(0,40,r"$R/R^{DC}=%0.2f$" %K,ha='center')

```



La plaque la plus affectée par l'augmentation de résistance est la plaque 0 (et la plaque 9 qui est similaire). Nous en concluons que l'effet de proximité pour une plaque est d'autant plus grand qu'il y a une grande différence entre son nombre de voisins à droite et son nombre de voisins à gauche. Pour la plaque centrale, l'effet de proximité est beaucoup plus faible. Pour une épaisseur e donnée de plaques en cuivre (1 mm), traçons le rapport des résistances en fonction de la fréquence :

```
N = 10
e = 1e-3
mu = 4*np.pi*1e-7
g = 6e7 # cuivre
f = np.linspace(10,20e3,1000)
delta = np.sqrt(1/(np.pi*f*mu*g))
u = e/delta
K = np.zeros(len(u))
for i in range(len(u)):
    K[i] = rapportR_Nplaques(N,u[i])
figure(figsize=(8,6))
plot(f,K)
xlabel(r"$f$ (\rm Hz)", fontsize=18)
ylabel(r"$\frac{R}{R^{DC}}$", fontsize=18)
grid()
xscale('log')
title('N = 10, e = 1 mm')
```

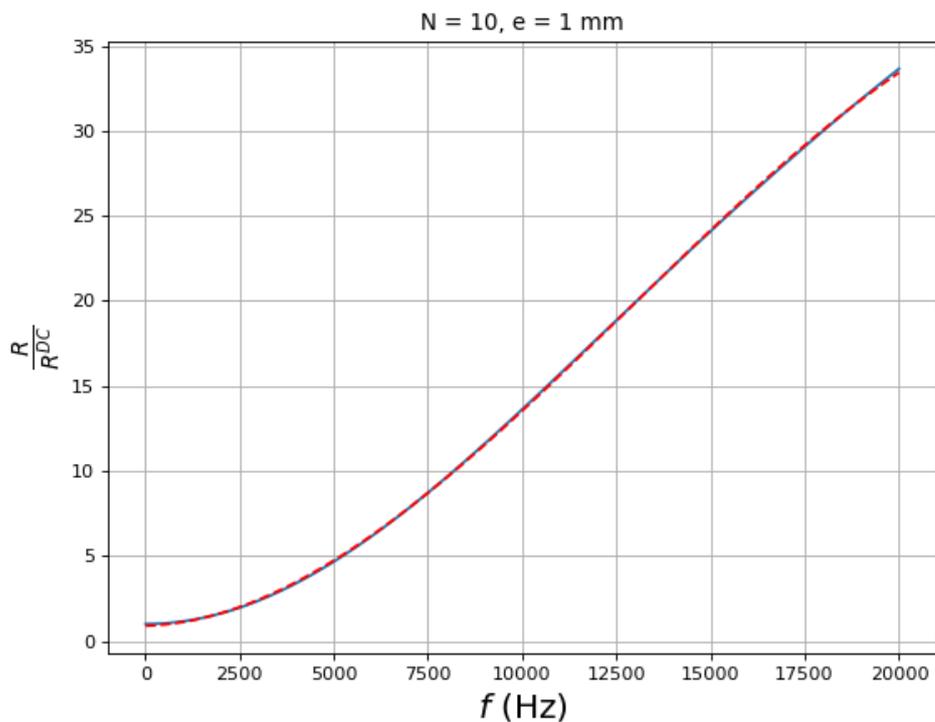


Voici la même courbe en échelle linéaire, avec un modèle polynomial de degré 3 obtenu par la méthode des moindres carrés :

```

yscale('linear')
xscale('linear')
deg = 3
coef, cov = np.polyfit(f,K,deg,cov=True)
Kmod = np.zeros(len(f))
for i in range(deg+1):
    Kmod += coef[i]*f**(deg-i)
plot(f,Kmod,'r--')

```

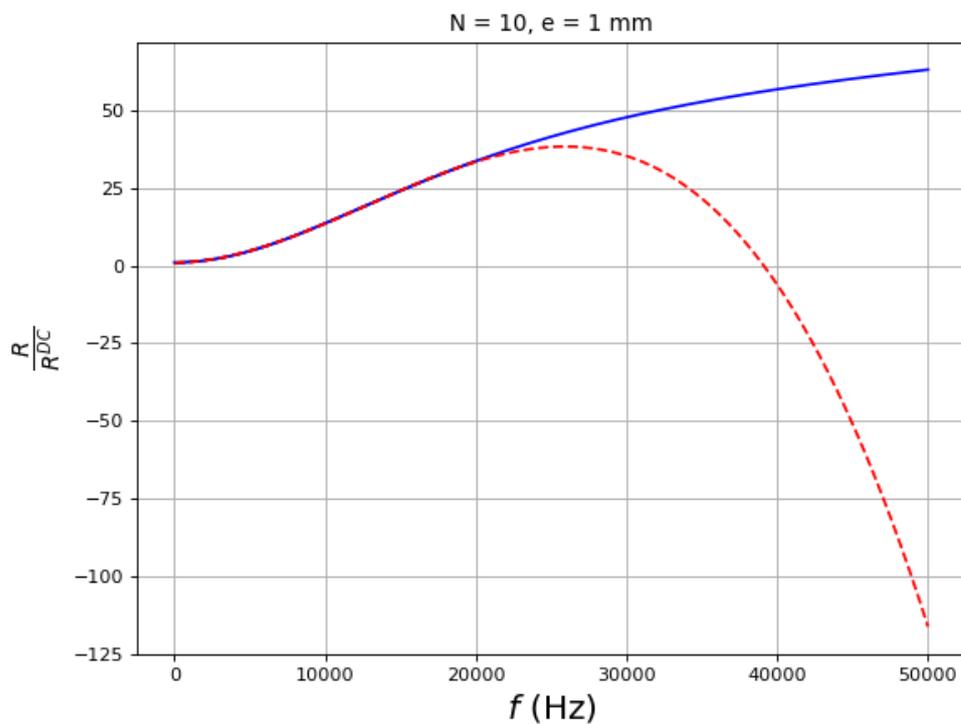


Pour ce domaine de fréquence (de 0 à 20 kHz), un modèle polynomial de degré 3 convient. Voyons la validité de ce modèle sur un domaine de fréquence plus large :

```

f = np.linspace(10, 50e3, 1000)
delta = np.sqrt(1/(np.pi*f*mu*g))
u = e/delta
K = np.zeros(len(u))
for i in range(len(u)):
    K[i] = rapportR_Nplaques(N,u[i])
plot(f,K,'b-')
Kmod = np.zeros(len(f))
for i in range(deg+1):
    Kmod += coef[i]*f**(deg-i)
plot(f,Kmod,'r--')

```



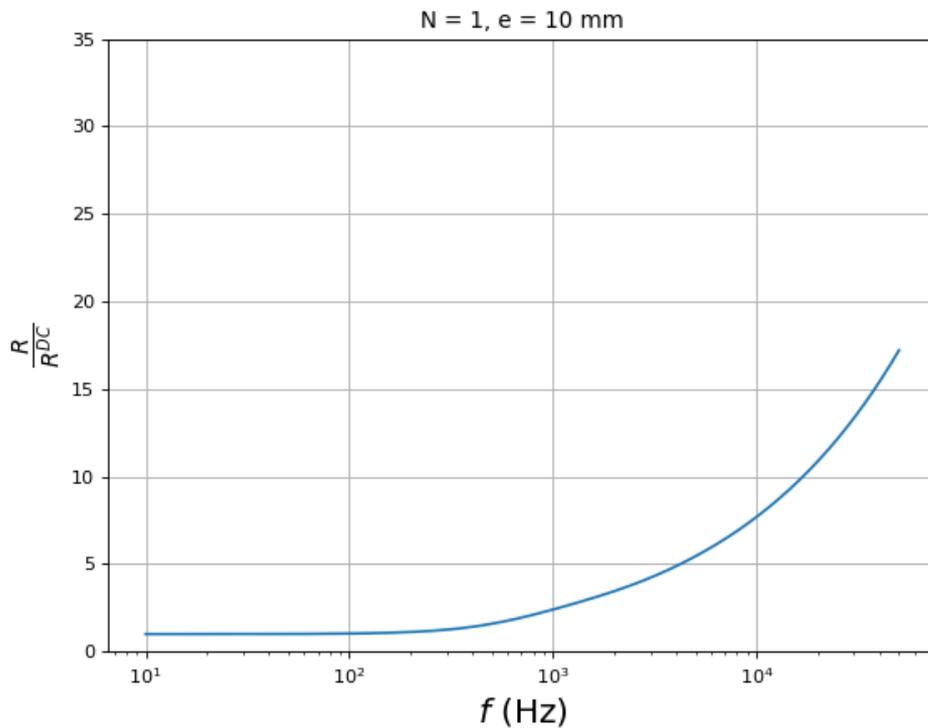
Le modèle polynomial de degré 3 échoue sur ce domaine de fréquence. Cela montre qu'une loi polynomiale établie sur un domaine de fréquence à partir de résultats expérimentaux ne peut être extrapolée en dehors de ce domaine.

Il est intéressant de tracer le rapport de résistances en fonction de la fréquence pour une seule plaque dont l'épaisseur est 10 mm :

```

N = 1
e = e*10
delta = np.sqrt(1/(np.pi*f*mu*g))
u = e/delta
K = np.zeros(len(u))
for i in range(len(u)):
    K[i] = rapportR_Nplaques(N,u[i])
figure(figsize=(8,6))
plot(f,K)
xlabel(r"$f$ (\rm Hz)", fontsize=18)
ylabel(r"$\frac{R}{R^{DC}}$", fontsize=18)
grid()
xscale('log')
title('N = 1, e = 10 mm')
ylim(0,35)

```



Le résultat est étonnant : à fréquence donnée, l'augmentation de résistance de 10 plaques est plus grande (surtout à haute fréquence) que l'augmentation de résistance d'une seule plaque d'épaisseur égale à la somme des épaisseurs des plaques. Pour estimer l'effet de proximité, il serait donc erroné d'assimiler les 10 plaques à une seule plaque et d'appliquer les résultats de l'effet de peau.

Nous pouvons aussi calculer l'énergie magnétique stockée dans la plaque et l'auto-inductance associée. Le calcul conduit à :

$$L = 12L_0 \int_{-1/2}^{1/2} |B'_z(x')|^2 dx' \quad (75)$$

où L_0 est donné par la relation (44). La fonction suivante calcule L/L_0 pour une plaque :

```
def rapportL(alpha,beta,u):
    x = np.linspace(-0.5,0.5,1000)
    r = np.absolute(Bz(alpha,beta,u,x))**2
    dx = x[1]-x[0]
    r = r[0:len(r)-1]
    return r.sum()*dx*12
```

et celle-ci calcule la moyenne de ce rapport pour les N plaques :

```
def rapportL_Nplaques(N,u):
    Lm = 0
    for p in range(N):
        alpha = N-2*p
        beta = alpha-2
```

```

    Lm += rapportL(alpha,beta,u)
return Lm/N

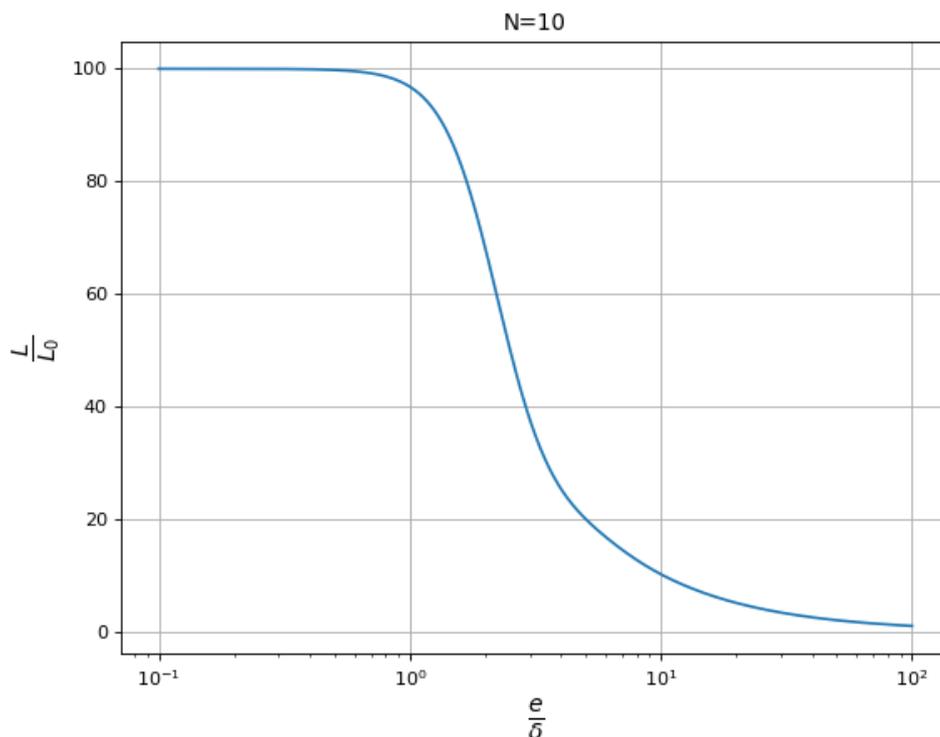
```

Pour 10 plaques, voici le rapport L/L_0 en fonction de e/δ :

```

N = 10
tab_u = np.logspace(-1,2,1000)
L = np.zeros(len(tab_u))
for i in range(len(tab_u)):
    L[i] = rapportL_Nplaques(N,tab_u[i])
figure(figsize=(8,6))
plot(tab_u,L)
xlabel(r"$\frac{e}{\delta}$", fontsize=18)
ylabel(r"$\frac{L}{L_0}$", fontsize=18)
grid()
xscale('log')
title('N=10')

```



4. Modélisation d'une bobine de longueur infinie

Dans une bobine, les portions de fil diamétralement opposées sont parcourues par des courants opposés. Le modèle des plaques permet de faire une modélisation de la bobine de longueur infinie, à condition de remplacer une couche de bobinage par une plaque. Dans le cas d'un système de symétrie axiale, les équations sont différentes mais le modèle des plaques permet une première approche. La figure suivante montre la modélisation d'une bobine comportant 3 couches (l'épaisseur des couches est exagérée par rapport au diamètre de la bobine) :

La direction (Oz) représente l'axe de la bobine. Les flèches bleues (rouge) représentent les champs magnétiques créés dans l'air par les plaques de gauche (droite). Chacun de ces vecteurs a une norme B_0 définie par (20). À l'intérieur de la bobine, tous ces vecteurs sont dans le même sens donc le champ est $B_z = 6B_0$. Le champ à l'extérieur de la bobine est nul. Le champ de part et d'autre de chaque plaque se calcule aisément par superposition des champs créés par les plaques.

On fait le calcul pour les N plaques situées à gauche, celles de droite étant antisymétriques. Pour la p ième plaque (la plaque d'indice 0 est à gauche), les conditions limites s'écrivent :

$$B_z(x = -\frac{e}{2}) = -NB_0 + (N - p)B_0 - pB_0 \quad (76)$$

$$B_z(x = +\frac{e}{2}) = -NB_0 + (N - p - 1)B_0 - (p + 1)B_0 \quad (77)$$

On a donc pour la plaque q :

$$\alpha = -2p \quad (78)$$

$$\beta = -2p - 2 \quad (79)$$

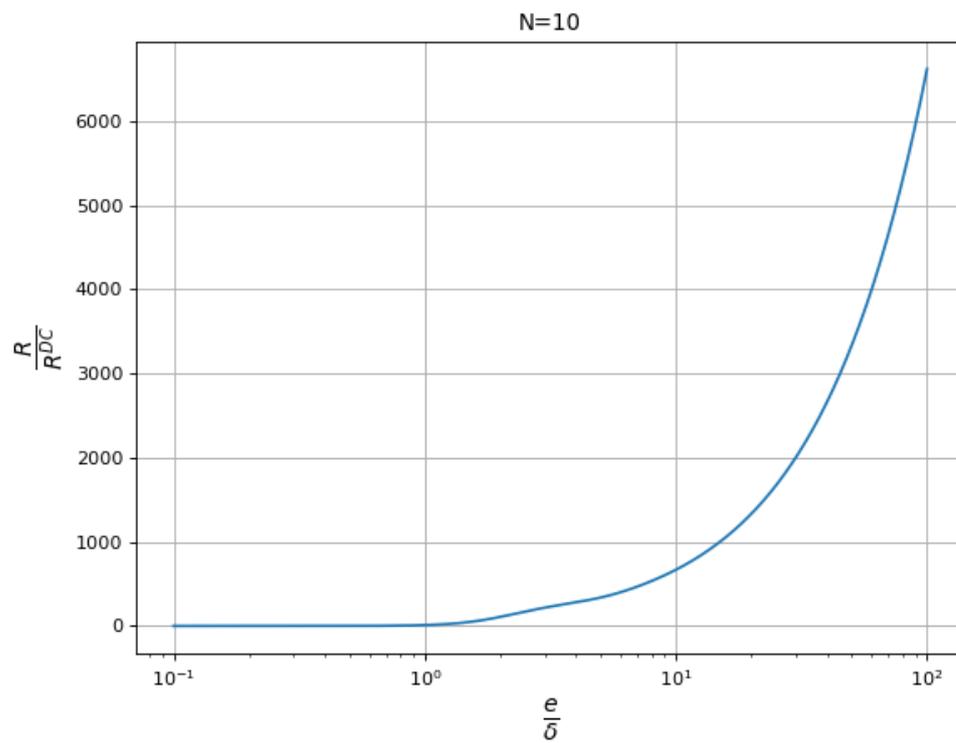
La fonction suivante calcule le rapport des résistances pour une bobine comportant N plaque de chaque côté (bobinage à N couches) :

```
def rapportR_NplaquesBobine(N,u):
    Km = 0
    for p in range(N):
        alpha = -2*p
        beta = alpha-2
        Km += rapportR(alpha,beta,u)
    return Km/N
```

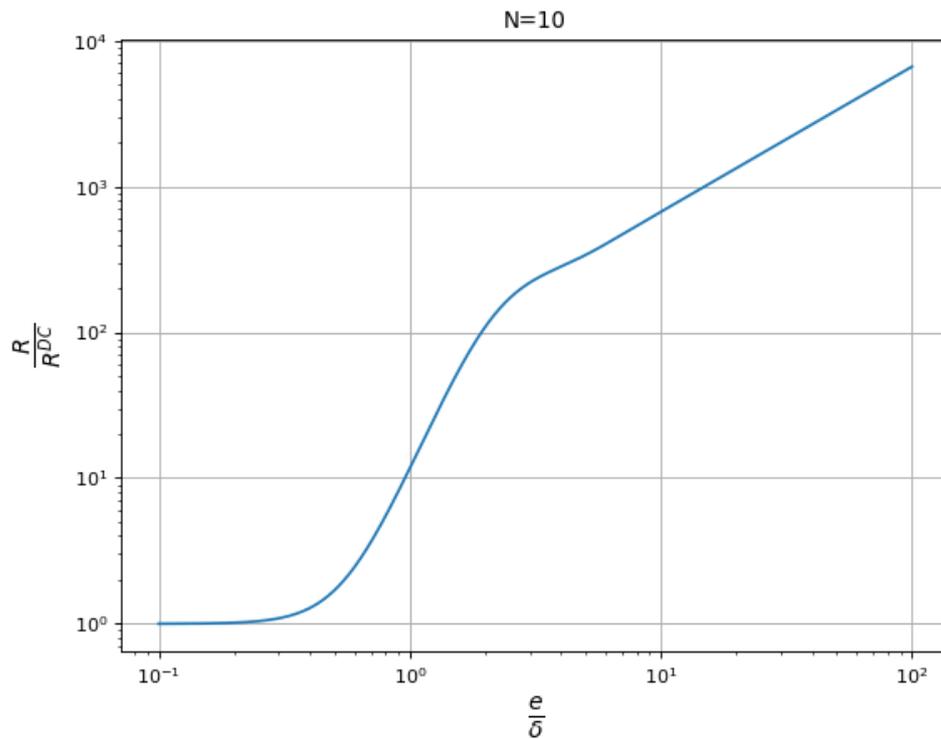
Pour $N = 10$, voici le rapport des résistances en fonction de e/δ :

```
N=10
tab_u = np.logspace(-1,2,1000)
K5 = np.zeros(len(tab_u))
for i in range(len(tab_u)):
    K5[i] = rapportR_NplaquesBobine(N,tab_u[i])
```

```
figure(figsize=(8,6))
plot(tab_u,K5)
xlabel(r"$\frac{e}{\delta}$", fontsize=18)
ylabel(r"$\frac{R}{R^{DC}}$", fontsize=18)
grid()
xscale('log')
title('N=10')
```



```
yscale('log')
```

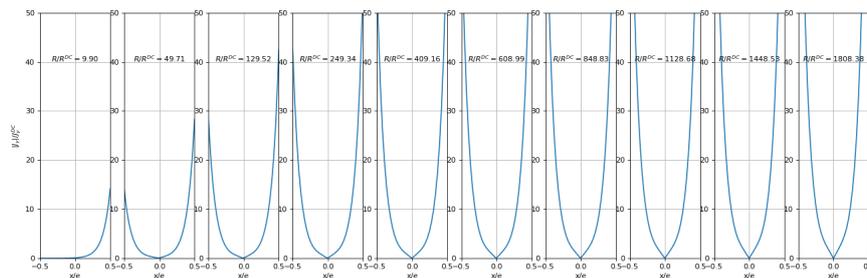


Voici le module de la densité de courant pour les 10 plaques et $e/\delta = 10$:

```

u = 10
x = np.linspace(-0.5,0.5,1000)
fig, axis = subplots(1,N,figsize=(20,6))
for p in range(N):
    alpha = -2*p
    beta = alpha-2
    r = rapportJ(alpha,beta,u,x)
    K = rapportR(alpha,beta,u)
    axis[p].plot(x,np.absolute(r))
    axis[p].grid()
    axis[p].set_xlim(-0.5,0.5)
    axis[p].set_ylim(0,50)
    axis[p].set_xlabel('x/e')
    if p==0: axis[p].set_ylabel(r' $|J_y|/J_y^{DC}$ ')
    axis[p].text(0,40,r"$R/R^{DC}=%0.2f$" %K,ha='center')

```



On constate que l'augmentation de résistance est d'autant plus forte que la plaque est proche de l'intérieur de la bobine. Pour un bobinage, on peut donc s'attendre à un effet de proximité d'autant plus fort que la couche est proche de la couche interne. La dissipation d'énergie est donc beaucoup plus grande dans les couches internes. L'augmentation de la résistance totale de la bobine est très grande (d'autant plus que la fréquence est grande) mais l'augmentation de la résistance des couches internes est encore beaucoup plus grande. Il faut cependant remarquer que ce modèle représente l'effet de proximité entre les couches de la bobine mais pas l'effet de proximité entre les spires.

Pour une épaisseur e donnée de plaques en cuivre (1 mm), traçons le rapport des résistances en fonction de la fréquence :

```

N = 10
e = 1e-3
mu = 4*np.pi*1e-7
g = 6e7 # cuivre
f = np.linspace(10,100e3,1000)
delta = np.sqrt(2/(np.pi*f*mu*g))
u = e/delta
K = np.zeros(len(u))
for i in range(len(u)):
    K[i] = rapportR_NplaquesBobine(N,u[i])
figure(figsize=(8,6))
plot(f,K)
xlabel(r"$f$ (\rm Hz)", fontsize=18)
ylabel(r"$\frac{R}{R^{DC}}$", fontsize=18)
grid()
xscale('log')
title('N = 10, e = 1,0 mm')

```

