Transformée de Fourier discrète : série de Fourier

1. Coefficients de Fourier

Soit $u(t)$ un signal de période T développable en série de Fourier :

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(j2\pi \frac{n}{T} t\right)$$

Les coefficients de Fourier sont, pour $n \in Z$:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) \exp\left(-j2\pi \frac{n}{T} t\right) dt$$

On considère un échantillonnage de $u(t)$ de N points, avec $0 \leq k \leq N-1$:

$$t_k = k\frac{T}{N}$$
$$u_k = u(t_k)$$

Une approximation des coefficients de Fourier peut être obtenue par la méthode des rectangles :

$$c_n \simeq \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{N-1} u_k \exp\left(-j2\pi n \frac{k}{N}\right) \frac{T}{N}$$

La formule obtenue définit une suite de période N. Il suffit donc de calculer, pour $0 \leq n \leq N-1$:

$$S_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} u_k \exp\left(-j2\pi n \frac{k}{N}\right)$$

L'application qui associe à la suite de N nombres u_k la suite S_n est la transformée de Fourier discrète (TFD). S_n est une approximation du coefficient de Fourier c_n, correspondant à l'harmonique de fréquence :

$$f_n = \frac{n}{T}$$

2. TFD avec Mathematica

La fonction permettant de calculer la TFD (par l'algorithme de transformée de Fourier rapide) est :

`Fourier[{s0,s1,...,sN-1},FourierParameters->{a,b}]` qui calcule la somme suivante (indice n de 1 à N) :

$$\frac{1}{N^{(1-a)/2}} \sum_{k=1}^{N} u_k \exp\left(j2\pi b(n-1)\frac{k-1}{N}\right)$$

Pour obtenir la TFD définie plus haut, il faut donc poser $a=-1$ et $b=-1$.

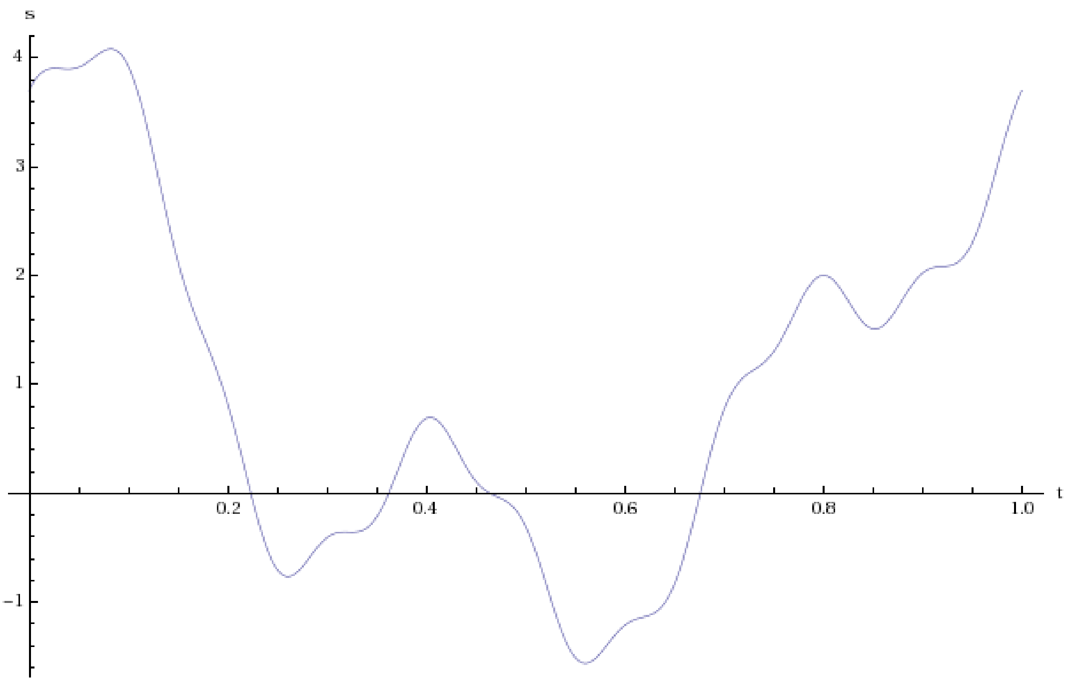
3. Applications

3.a. Polynôme trigonométrique

On définit un signal sous forme de polynôme trigonométrique de période T :

```
T = 1;
w0 = 2*Pi*T;
signal[t_] := 1 + 2*Cos[w0*t] + 0.5*Cos[2*w0*t] + 1*Sin[3*w0*t] + 0.2*Cos[10*w0*t];
```

```
Plot[signal[t], {t, 0, 1},AxesLabel->{'t','s'}]
```



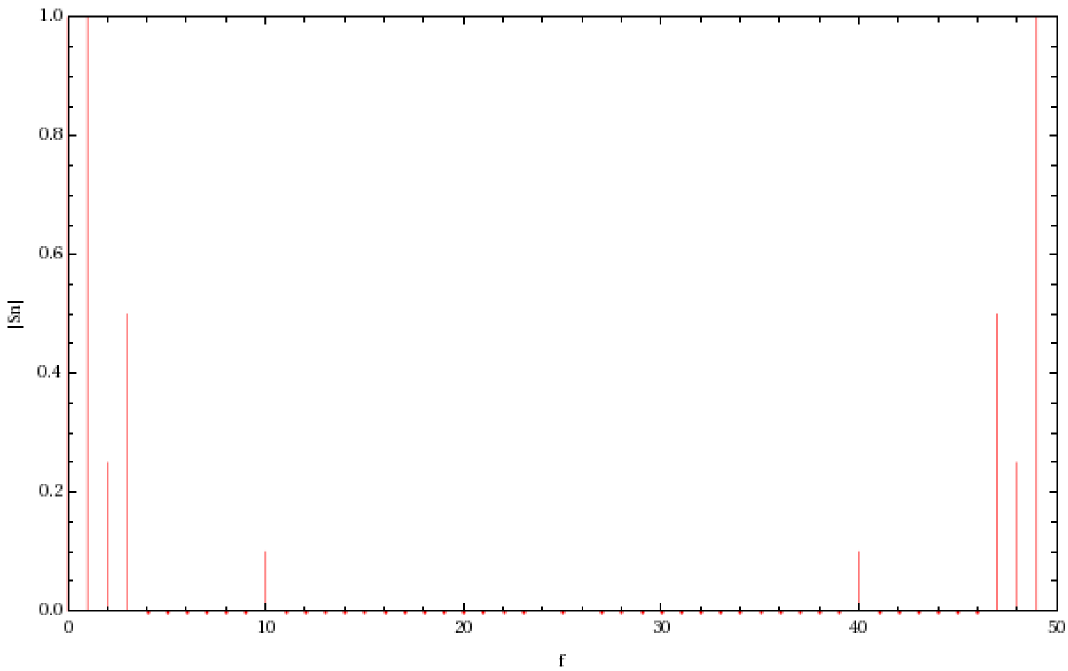
Échantillonnage du signal :

```
npoints = 50; (* nombre de points *)
te = T/npoints; (* temps d'echantillonnage *)
temps[k_] := (k - 1)*te;
echantillons = Table[signal[temps[k]], {k, npoints}];
```

Calcul de la TFD et tracé du spectre (module de $|S_n|$) :

```
coefFourier = Fourier[echantillons, FourierParameters -> {-1, -1}];
frequences[k_] := (k - 1)/T;
raies = Table[Line[{{frequences[k], 0}, {frequences[k], Abs[coefFourier[[k]]]}}], {k,
```

```
Show[Graphics[{RGBColor[1,0,0],raies},Frame->True,PlotRange->{{0,npoints/T},{0,1}},
           AspectRatio->0.6,FrameLabel->{'f','|Sn|'}]]
```



On reconnait sur la première moitié du spectre les coefficients de Fourier $c_0 = 1$, $c_1 = 2/2$, $c_2 = 0.5/2$, $c_3 = -j/2$, $c_{10} = 0.2/2$

On remarque la propriété suivante :

$$|S_n| = |S_{N-n}|$$

En effet, si la fonction $u(t)$ est à valeurs réelles, on a :

$$S_{N-n} = S_n^*$$

La deuxième partie du spectre (appelée aussi l'image du spectre) correspond donc aux coefficients de Fourier d'indices négatifs :

$$c_{-n} \simeq S_{N-n}$$

Il y a par ailleurs la périodicité de la suite S_n :

$$S_n = S_{N+n}$$

On obtient donc un spectre dont la périodicité est la fréquence d'échantillonnage

$$f_e = \frac{N}{T}$$

C'est effectivement le spectre d'un signal échantillonné à cette fréquence.

Pour simplifier, définissons une fonction calculant le spectre pour une fréquence d'échantillonnage donnée :

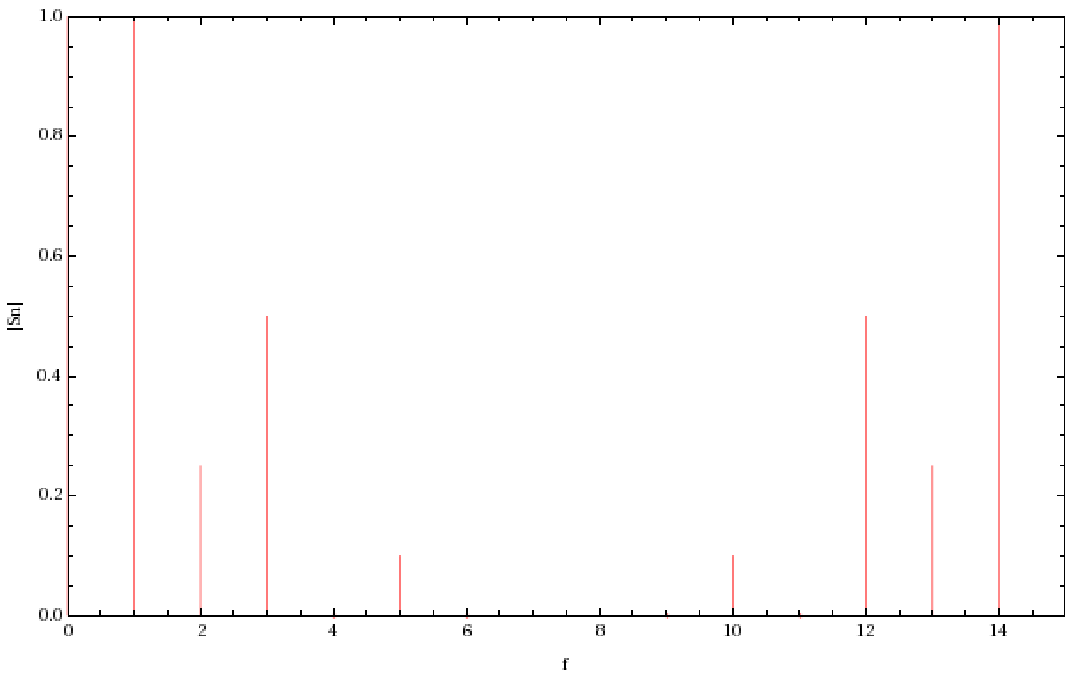
```
raiesSpectre[npoints_]:=Module[{te,temps,echantillons,frequences},
    te = T/npoints;
    temps[k_] := (k - 1)*te;
    echantillons = Table[signal[temps[k]], {k, npoints}];
```

```
    coefFourier = Fourier[echantillons, FourierParameters -> {-1, -1}];
    frequences[k_] := (k - 1)/T;
    Return[Table[Line[{{frequences[k], 0}, {frequences[k], Abs[coefFourier[[k]]]}}],
                      {k, npoints}]];
]
```

D'après le théorème de Shannon, la fréquence d'échantillonnage doit être supérieure (strictement) au double de la plus grande fréquence présente dans le spectre du signal (10 fois 2 sur l'exemple précédent). Voyons ce qu'il advient si cette condition n'est pas vérifiée :

```
npoints=15;
raies = raiesSpectre[npoints];
```

```
Show[Graphics[{RGBColor[1,0,0],raies},Frame->True,PlotRange->{{0,npoints/T},{0,1}},
          AspectRatio->0.6,FrameLabel->{'f','|Sn|'}]]
```

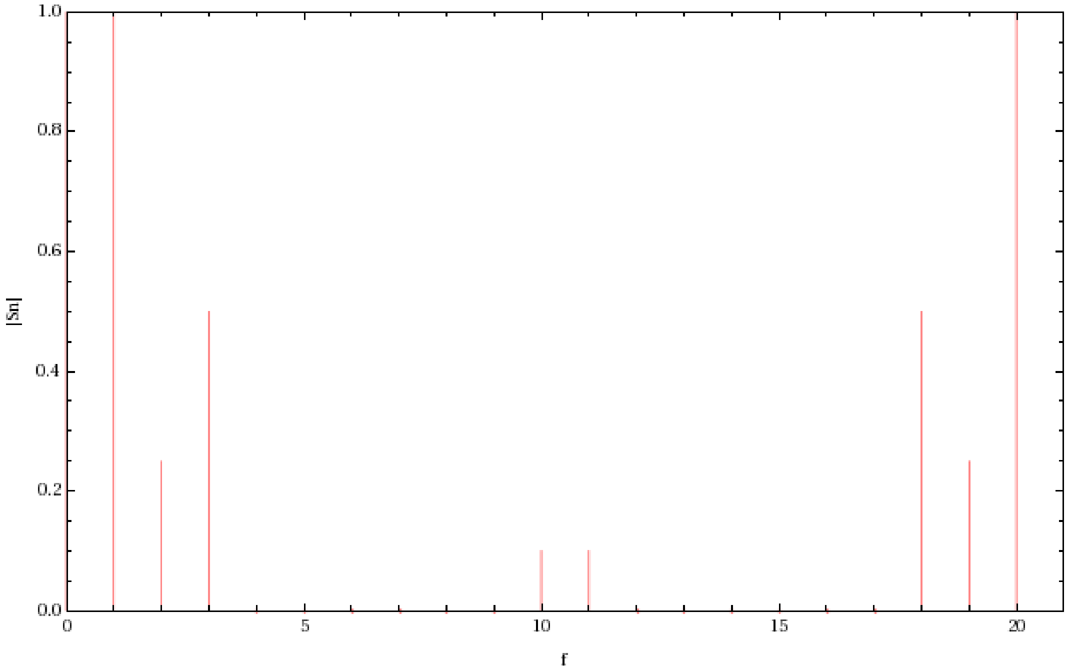


On remarque l'apparition d'une harmonique de rang $n = 5$, position qui correspond en fait à l'image de l'harmonique de rang 10. Ce phénomène est appelé le repliement de bande. Il se produit lorsqu'une partie non négligeable du spectre se superpose à son image.

Considérons le cas d'un signal périodique comportant une fréquence maximale dans son spectre, c'est-à-dire qu'il existe $p \in N$ tel que $c_n = 0$ pour $|n| > p$. Dans ce cas, le signal est un polynôme trigonométrique. La condition imposée par le théorème de Shannon est suffisante pour obtenir les coefficients de Fourier de $u(t)$, aux erreurs d'arrondis près. Vérifions-le sur l'exemple précédent en adoptant $N = 21$, c'est-à-dire $f_e = 21 > 20$.

```
npoints=21;
raies = raiesSpectre[npoints];
```

```
Show[Graphics[{RGBColor[1,0,0],raies},Frame->True,PlotRange->{{0,npoints/T},{0,1}},
          AspectRatio->0.6,FrameLabel->{'f','|Sn|'}]]
```



L'harmonique de rang 10 est bien correctement calculée.

3.b. Signal en créneau

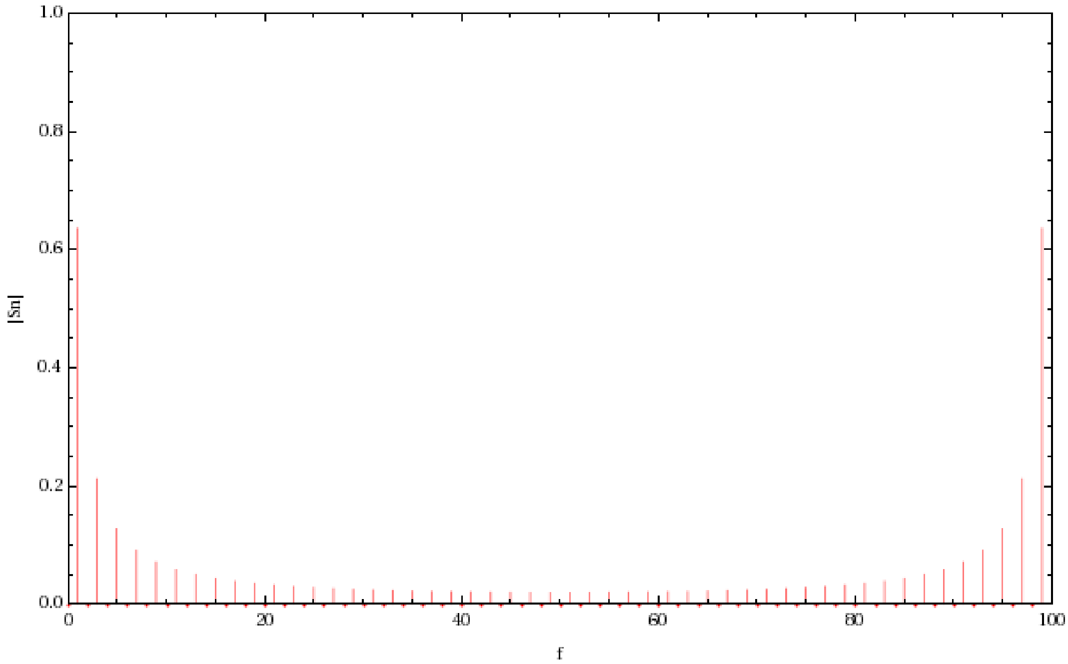
Cet exemple met en évidence les problèmes liés à l'existence de hautes fréquences dans le spectre. On définit le signal sur l'intervalle $[0, T]$:

```
T=1
signal[t_]:=If[t<T/2,1,-1];
```

Dans ce cas, il n'existe pas de fréquence maximale dans le spectre. La précision du calcul sera d'autant plus grande que N est grand.

```
npoints=100;
raies = raiesSpectre[npoints];
```

```
Show[Graphics[{RGBColor[1,0,0],raies},Frame->True,PlotRange->{{0,npoints/T},{0,1}},
          AspectRatio->0.6,FrameLabel->{'f','|Sn|'}]]
```



La valeur relativement importante des harmoniques au voisinage de $f_e/2$ laisse deviner un phénomène de repliement de bande non négligeable. En théorie, les coefficients de Fourier impairs de la fonction créneau vérifient :

$$\frac{|c_1|}{|c_n|} = n$$

Le tableau suivant permet de déterminer la précision du calcul par la TFD :

```
indices=Table[2*p-1,{p,1,20}];
precision=Table[Abs[coefFourier[[2]]]/Abs[coefFourier[[2*p]]]/(2*p-1),{p,1,20}];
```

n|S1|/(n|Sn|)1130.99868450.99605770.99212290.986892110.980376130.972592150.963556170.9532921

n	$\lvert S_1\rvert/(n\lvert S_n\rvert)$
1	1
3	0.998684
5	0.996057
7	0.992122
9	0.986892
11	0.980376
13	0.972592
15	0.963556
17	0.953292
19	0.941822
21	0.929174
23	0.915377
25	0.900464
27	0.884471
29	0.867433
31	0.849391
33	0.830387
35	0.810465
37	0.789671
39	0.768054

On constate que l'erreur dépasse 5 pour cent à partir du rang $n = 19$. Cela est du au repliement des harmoniques de rang supérieur à $f_e/2$ (50) sur les harmoniques de rang inférieur. Pour améliorer la précision, augmentons N :

```
npoints=500;
raies = raiesSpectre[npoints];
indices=Table[2*p-1,{p,1,20}];
precision=Table[Abs[coefFourier[[2]]]/Abs[coefFourier[[2*p]]]/(2*p-1),{p,1,20}];
```

n|S1|/(n|Sn|)1130.99994750.99984270.99968490.999474110.999211130.998895150.998527170.9981061

n	$\|S_1\|/(n\|S_n\|)$
1	1
3	0.999947
5	0.999842
7	0.999684
9	0.999474
11	0.999211
13	0.998895
15	0.998527
17	0.998106
19	0.997633
21	0.997107
23	0.99653
25	0.995899
27	0.995217
29	0.994482
31	0.993695
33	0.992857
35	0.991966
37	0.991023
39	0.990029

L'augmentation du nombre de points est coûteuse en calcul, surtout si l'on cherche les harmoniques de rang élevé. Une autre solution consiste à appliquer un filtrage passe-bas au signal avant de calculer la TFD. En effet, considérons un filtre passe-bas qui élimine, ou atténue fortement, les harmoniques à partir du rang $n = 40$. Une bonne précision sur le calcul du spectre pour $n < 40$ pourra être obtenue avec seulement $N = 80$. Le filtre utilisé doit avoir une réponse la plus constante possible dans la bande passante, de manière à ne pas altérer les harmoniques à calculer.