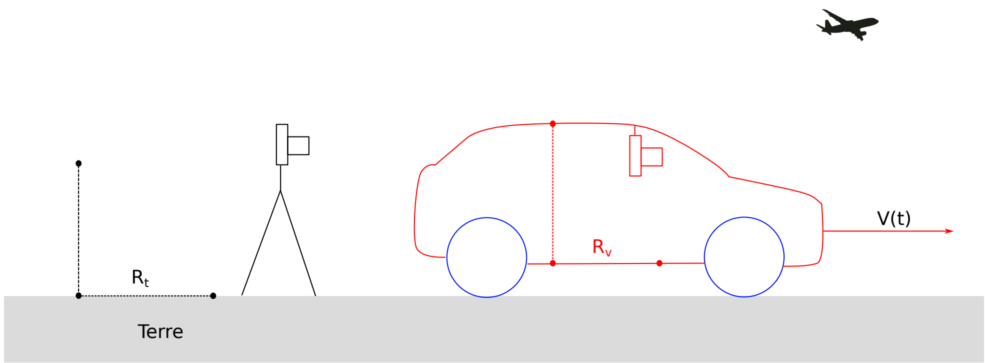
Changements de référentiel

1. Cinématique dans un référentiel

1.a. Référentiel

Un *référentiel* est un système rigide, c'est-à-dire un ensemble de points dont les distances relatives sont constantes au cours du temps. En pratique, un référentiel est souvent défini par un solide indéformable, ou du moins dont la déformation peut être négligée. Par exemple, un bâtiment constitue un référentiel, qui peut être assimilé au référentiel terrestre dans la mesure où il reste immobile par rapport à la Terre. La carosserie d'une voiture en mouvement constitue un autre référentiel.



Pour définir la position d'un référentiel dans l'espace, il suffit de définir les positions de trois points non alignés qui lui sont liés. Par exemple, trois points non alignés de la carosserie suffisent à définir complètement la position de la voiture dans le référentiel terrestre. Pour certains référentiels, on ne dispose pas de solide au sens matériel du terme et on doit alors le définir par trois points non alignés rigidement liés. Par exemple, le référentiel de Copernic est défini par le centre de masse du système solaire et par deux étoiles, qui doivent être assez lointaines pour que leur distance au Soleil et leur distance relative puissent être considérées comme fixes pendant l'intervalle de temps considéré.

Le mouvement d'un point matériel, ou plus généralement d'un corps solide, est défini par rapport à un référentiel. Expérimentalement, les instruments d'observation, par exemple les caméras ou autres capteurs, doivent être liés au référentiel. Si le référentiel est matérialisé par un solide, les instruments doivent être fixés sur ce solide. Par exemple, une caméra fixée sur la carosserie d'une voiture et filmant un objet fournira des informations sur le mouvement de l'objet dans le référentiel de la voiture. Un télescope fixe par rapport à la Terre révèle le mouvement des étoiles dans le référentiel terrestre. Si en revanche le télescope est entraîné par une monture équatoriale motorisée, les étoiles sont observées dans le référentiel géocentrique.

1.b. Le temps en cinématique classique

Le temps (la durée entre deux évènements) est mesuré par une horloge. Le fonctionnement des horloges repose sur un système oscillant (pendule mécanique, quartz, horloge atomique) dont la fréquence d'oscillation est plus ou moins stable.

L'horloge doit en principe être liée au référentiel. Cependant, la cinématique classique repose sur l'hypothèse *d'invariance des durées par changement de référentiel* : on suppose que la durée mesurée par une horloge entre deux évènements est indépendante du référentiel auquel l'horloge est liée. Depuis le développement de la théorie de la relativité restreinte, on sait que cela n'est vrai qu'approximativement, si les référentiels ont une vitesse relative faible devant celle de la lumière. Pour résumer, le temps en cinématique classique est un paramètre absolu, indépendant du référentiel. Dans le cadre de la théorie de la relativité, l'horloge doit être liée au référentiel considéré.

1.c. Repère

Un repère lié au référentiel doit être défini pour donner la position d'un point dans un référentiel. Le repère le plus utilisé est le repère cartésien, constitué d'un centre O et de trois axes (Ox, Oy, Oz) orthogonaux et formant un trièdre orienté dans le sens direct. Les coordonnées d'un point dans ce repère sont (x, y, z).

Il convient de ne pas confondre repère et référentiel, car il existe une infinité de repères différents liés à un même référentiel. Inversement, la donnée d'un repère dans l'espace définit de manière unique un référentiel : c'est le système rigide constitué des points fixes dans ce repère, c'est-à-dire des points dont les coordonnées sont constantes au cours du temps. Pour les calculs vectoriels, on utilise aussi la base orthonormée $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_y})$ liée au repère.

Dans certains cas, on utilise une base orthonormée non liée au référentiel, par exemple la base locale des coordonnées cylindriques ou sphériques.

1.d. Cinématique du point

On considère un point matériel dont le mouvement est étudié dans un référentiel R. La *trajectoire* du point matériel dans le référentiel est l'ensemble des points liés au référentiel occupés par le point au cours du temps. Autrement dit, c'est la trace laissée par le point matériel sur le solide de référence. Par exemple, lorsqu'on observe un mouvement avec une caméra liée au référentiel, on obtient la projection de la trajectoire (projection centrale) sur le plan image. On combinant plusieurs projections, on peut ainsi reconstituer la trajectoire complète dans le référentiel.

En associant à chaque point de la trajectoire l'instant t où le point matériel coïncide avec lui, on obtient une description complète du mouvement.

Considérons la position $M(t)$ du point à l'instant t, c'est-à-dire le point lié au référentiel R avec lequel le point matériel coïncide à l'instant t. Soit $M(t+\Delta t)$ sa position à l'instant $t+\Delta t$. Le vecteur vitesse à l'instant t dans le référentiel R est défini comme la limite suivante :

$$\overrightarrow{v}_{M/R} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{M(t)M(t+\Delta t)}}{\Delta t} = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_R \tag{1}$$

Dans cette expression, l'intervalle de temps au dénominateur est indépendant du référentiel. En revanche, le déplacement élémentaire du numérateur dépend du référentiel. On dira donc que le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est dérivé par rapport au temps dans le référentiel R.

Si un repère cartésien lié au référentiel est utilisé, le mouvement dans le référentiel est donné par la courbe paramétrée $(x(t), y(t), z(t))$. Si O est l'origine des coordonnées, le vecteur position s'écrit :

$$\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\overrightarrow{u_x} + y(t)\overrightarrow{u_y} + z(t)\overrightarrow{u_z} \tag{2}$$

Dans cette expression, on remarque que les coordonnées du point dépendent en général du temps, alors que les vecteurs unitaires sont constants puisqu'ils sont liés au référentiel.

La vitesse, c'est-à-dire le vecteur vitesse, du point M dans le référentiel R est par définition la dérivée par rapport au temps du vecteur position dans le référentiel R :

$$\overrightarrow{v}_{M/R} = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_R = \frac{dx}{dt}\overrightarrow{u_x} + \frac{dy}{dt}\overrightarrow{u_y} + \frac{dz}{dt}\overrightarrow{u_z} \tag{3}$$

Le vecteur vitesse est toujours tangent à la trajectoire, orienté dans le sens du mouvement.

L'accélération est la dérivée par rapport au temps de la vitesse, dérivée calculée dans le référentiel :

$$\overrightarrow{a}_{M/R} = \left(\frac{d\overrightarrow{v}_{M/R}}{dt}\right)_R = \frac{d^2x}{dt^2}\overrightarrow{u_x} + \frac{d^2y}{dt^2}\overrightarrow{u_y} + \frac{d^2z}{dt^2}\overrightarrow{u_z} \tag{4}$$

L'accélération comporte en général une composante tangente à la trajectoire et une composante normale, orientée vers le centre de courbure.

Voyons l'exemple d'un mouvement circulaire uniforme. Le cercle, de centre O et de rayon r, est décrit à la vitesse angulaire constante ω. Il est contenu dans le plan Oxy. En projection sur la base liée au référentiel, le vecteur position s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} = r\cos(\omega\, t)\overrightarrow{u_x} + r\sin(\omega\, t)\overrightarrow{u_y} \tag{5}$$

On peut obtenir la vitesse et l'accélération en dérivant cette expression par rapport au temps. Il est néanmoins plus commode d'utiliser la base locale des coordonnées polaires $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$ (base non liée au référentiel) :

$$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u_r} \tag{6}$$

$$\overrightarrow{v} = r\omega\overrightarrow{u_\theta} \tag{7}$$

$$\overrightarrow{a} = -r\omega^2\overrightarrow{u_r} \tag{8}$$

On voit ainsi que l'accélération est purement normale, dirigée vers le centre du cercle.

2. Référentiels en mouvement de translation

2.a. Définition

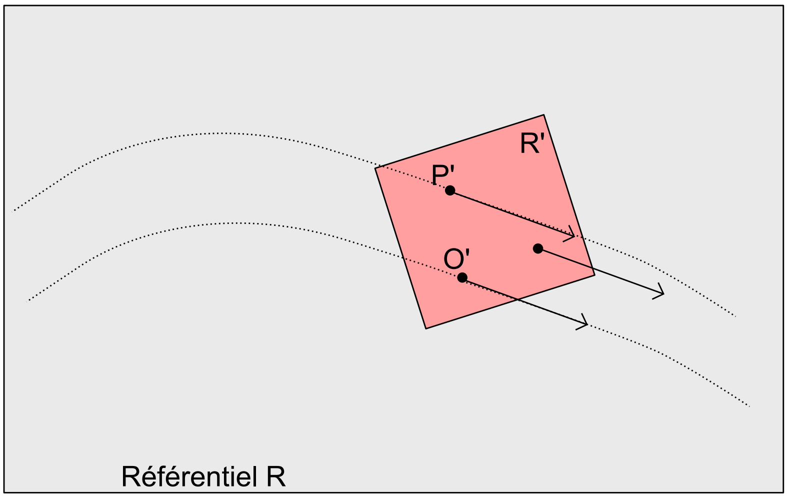
Soient un référentiel R et un second référentiel R' en mouvement par rapport au premier. On peut imaginer comme exemple le référentiel défini par un véhicule, en mouvement par rapport au référentiel terrestre.

On s'intéresse ici au cas du *mouvement de translation*, défini de la manière suivante :

> Le référentiel R' est en mouvement de translation par rapport au référentiel R si, à tout instant, les points liés au référentiel R' ont la même vitesse dans le référentiel R.

Soit O' un point lié à R', qui pourra servir d'origine pour un repère lié à R'. La vitesse d'un point P' quelconque lié à R' est identique à celle du point O' :

$$\overrightarrow{v}_{P'/R}(t) = \overrightarrow{v}_{O'/R}(t) \tag{9}$$



Si A' et B' sont deux points liés à R', on vérifie aisément que le vecteur $\overrightarrow{A'B'}$ est fixe dans R :

$$\left(\frac{d\overrightarrow{A'B'}}{dt}\right)_R = -\overrightarrow{v}_{A'/R} + \overrightarrow{v}_{B'/R} = \overrightarrow{0} \quad (10)$$

Autrement dit, tout vecteur lié au référentiel R' est fixe dans R. En particulier, les vecteurs d'une base orthonormée liée à R' sont constants dans R :

$$\left(\frac{d\overrightarrow{u_{x'}}}{dt}\right)_R = \overrightarrow{0} \quad (11)$$

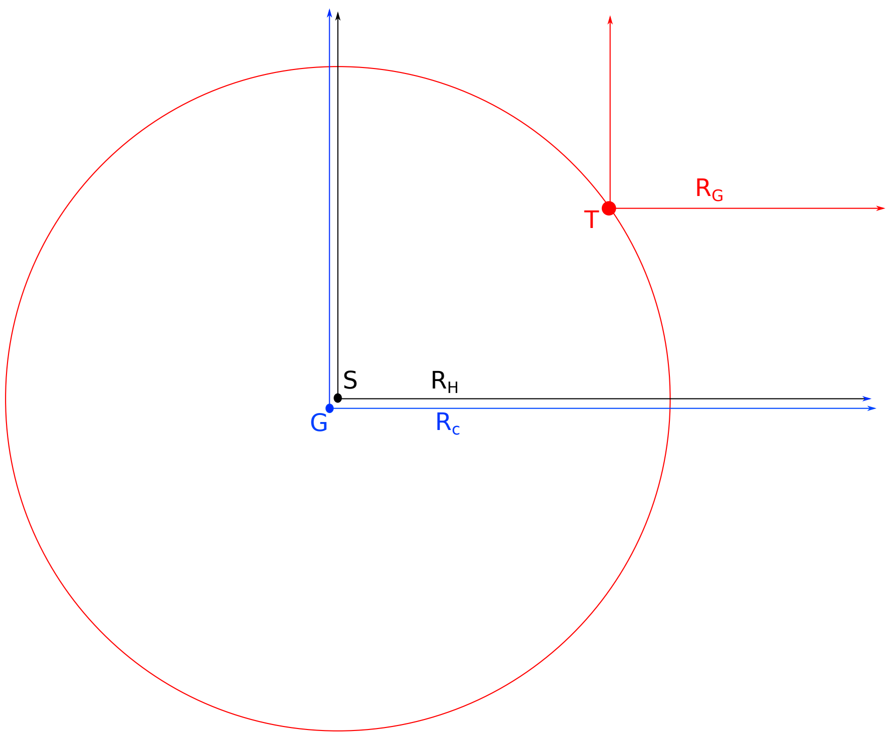
Le vecteur $\overrightarrow{A'B'}$ étant constant dans R, la trajectoire de B' se déduit de celle de A' par une translation de vecteur $\overrightarrow{A'B'}$.

Si la trajectoire du point O' dans R est une droite, le référentiel R' est en mouvement de *translation rectiligne* par rapport à R. Sa vitesse garde alors une direction fixe. Les trajectoires des différents points liés à R' sont alors des droites parallèles. Si de plus cette vitesse est constante, il s'agit d'un mouvement de *translation rectiligne uniforme*. Un exemple de mouvement de translation rectiligne est celui d'une voiture se déplaçant sur une route droite et sans aspérités, considérée par rapport à la terre.

Le référentiel défini par une cabine de téléphérique est en mouvement de translation par rapport à la terre, même si le cable présente une courbure.

Lorsque le point O' a un mouvement circulaire dans le référentiel R, on parle de mouvement de *translation circulaire*. Les autres points liés à R' ont un mouvement circulaire qui se déduit du mouvement de O' par une translation. En conséquence, les cercles décrits par ces points ont tous le même rayon. Un exemple de ce type de mouvement est celui des nacelles d'une grande roue, comme le London Eye. Chaque nacelle reste horizontale au cours de son mouvement de révolution, et constitue donc un référentiel en translation par rapport à la terre.

Le référentiel héliocentrique (R_H) est défini par le centre du Soleil (S) et par deux étoiles très lointaines, ces trois points formant un système rigide sur l'échelle de temps considérée. Le référentiel géocentrique (R_G) est un référentiel en mouvement de translation par rapport au référentiel héliocentrique, dans lequel le centre de la Terre (T) est fixe. Dans la mesure où l'orbite terrestre est assimilée à un cercle, il s'agit d'une translation circulaire. La vitesse de la Terre dans le référentiel héliocentrique est d'environ $30\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$. Cette vitesse est 10000 fois plus petite que celle de la lumière, ce qui permet d'appliquer la cinématique classique (non relativiste). Comme le montre la figure ci-dessous, il est possible d'associer au référentiel géocentrique un repère orthogonal dont les axes restent en permanence parallèles à ceux d'un repère lié au référentiel héliocentrique.



Le référentiel utilisé pour l'étude précise du système solaire est le référentiel de Copernic (R_C) défini par le centre de masse (G) du système solaire et par deux étoiles très lointaines. Par définition R_H, est en mouvement de translation par rapport à R_C, si bien que R_G est aussi en translation par rapport à R_C. Les référentiels héliocentriques et de Copernic peuvent être confondus en première approximation, dans la mesure où le centre de masse du système solaire est très proche du centre du Soleil. Pour des calculs précis, ils doivent être néanmoins distingués. Le référentiel de Copernic est considéré comme un référentiel galiléen pour déterminer précisément les mouvements des planètes dans le système solaire. Le référentiel héliocentrique a cependant l'avantage d'être plus facile à déterminer car le centre du Soleil est directement observable, ce qui n'est pas le cas du centre de masse du système solaire.

2.b. Composition des vitesses et des accélérations

Considérons un point matériel de position $M(t)$. Son mouvement pour un observateur lié à R est en général différent de celui observé depuis R'. Par exemple, si le point est fixe dans R, il est en mouvement dans R'.

On s'intéresse tout d'abord à la relation (à l'instant t) entre la vitesse du point dans R et celle dans R'. On considère pour cela la relation :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} \tag{12}$$

où O est un point fixe de R et O' un point fixe de R'. On dérive par rapport au temps, qui en cinématique classique est indépendant du référentiel. La variation des vecteurs doit être considérée dans le référentiel R. Pour dériver le vecteur $\overrightarrow{O'M}$ dans R, on effectue une décomposition sur la base liée à R' :

$$\left(\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right)_R = \frac{d}{dt}\left(x'(t)\overrightarrow{u_{x'}} + y'(t)\overrightarrow{u_{y'}} + z'(t)\overrightarrow{u_{z'}}\right) \tag{13}$$

$$= \frac{dx'(t)}{dt}\overrightarrow{u_{x'}} + \frac{dy'(t)}{dt}\overrightarrow{u_{y'}} + \frac{dz'(t)}{dt}\overrightarrow{u_{z'}} \tag{14}$$

Il s'agit de la vitesse que l'on obtient en dérivant le vecteur dans R', c'est-à-dire la vitesse du point M dans R'. On obtient donc :

$$\overrightarrow{v}_{M/R} = \overrightarrow{v}_{O'/R} + \overrightarrow{v}_{M/R'} \tag{15}$$

Ce résultat constitue la composition des vitesses. Rappelons que tous les points liés au référentiel R' ont la même vitesse dans R.

La vitesse du point O' est appelé *vitesse d'entraînement* du point M par le référentiel R'. C'est aussi la vitesse dans R du point P' lié à R' et coïcidant avec le point M à l'instant t considéré. On obtient finalement la relation :

$$\overrightarrow{v}_{M/R} = \overrightarrow{v}_e + \overrightarrow{v}_{M/R'} \tag{16}$$

La vitesse d'entraînement $\overrightarrow{v}_e$ est la vitesse dans R du point P' lié à R' et coïncidant avec le point matériel à l'instant t considéré.

En dérivant une seconde fois par rapport au temps, on obtient la composition des accélérations :

$$\overrightarrow{a}_{M/R} = \overrightarrow{a}_{O'/R} + \overrightarrow{a}_{M/R'} \tag{17}$$

L'accélération du point O' est l'accélération d'entraînement, c'est-à-dire l'accélération dans R du point lié à R' coïncidant avec M à l'instant t. On écrira donc pour un mouvement de translation :

$$\overrightarrow{a}_{M/R} = \overrightarrow{a}_e + \overrightarrow{a}_{M/R'} \tag{18}$$

L'accélération d'entraînement $\overrightarrow{a}_e$ est l'accélération dans R du point P' lié à R' et coïncidant avec le point matériel à l'instant t considéré.

On sait aujourd'hui que la vitesse de la lumière dans le vide est une constante indépendante du référentiel dans lequel elle est mesurée. Cela constitue le principe fondateur de la théorie de la relativité restreinte, et a été vérifié expérimentalement (la première fois par Michelson et Morley). L'invariance de la vitesse de la lumière est en contradiction avec la formule classique de composition des vitesses, qui en effet ne peut s'appliquer pour des vitesses proches de celle de la lumière.

2.c. Transformation de Galilée

Lorsque le référentiel R' est en mouvement de translation rectiligne uniforme par rapport à R, on peut par convention poser

$$\overrightarrow{v}_{O'/R} = v\overrightarrow{u_x} \tag{19}$$

On peut aussi définir un repère $(O'x'y'z)$ lié à R' qui coïncide à l'instant $t = 0$ avec le repère $(Oxyz)$ lié à R. La relation entre les coordonnées d'un point dans les deux référentiels s'écrit alors :

$$\begin{aligned} x' &= x - vt \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t \end{aligned} \tag{20}$$

La dernière ligne a été ajoutée pour bien noter l'invariance du temps par changement de référentiel.

Cette relation constitue la transformation de Galilée, valable lorsque v est très petit devant la vitesse de la lumière. Dans le cas contraire, elle doit être remplacée par la transformation de Lorentz (hors programme) :

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \frac{t-vx/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \end{aligned} \tag{21}$$

Lorsque $\frac{v}{c} \ll 1$, la transformation de Galilée est valable avec une très bonne précision.

3. Référentiels en mouvement de rotation uniforme

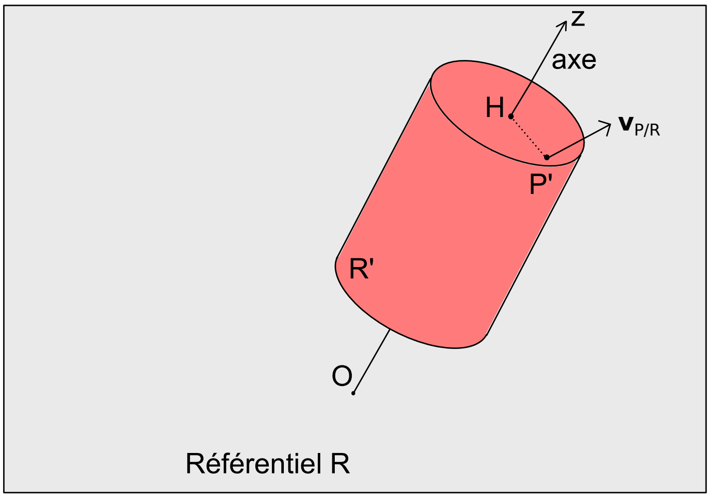
3.a. Définition

Un référentiel R' est en mouvement de rotation uniforme autour d'un axe fixe dans R si tout point P' lié à R', dont le projeté orthogonal sur l'axe de rotation est noté H, décrit dans R un cercle de centre H inscrit dans un plan orthogonal à cet axe, à la vitesse angulaire ω constante.

Le rayon du cercle décrit par le point P' est $r = HP'$. On peut par convention utiliser un repère $(Oxyz)$ lié à R, l'axe Oz étant l'axe de rotation, et utiliser la base locale des coordonnées cylindriques associées à ce repère. La vitesse de P' dans le référentiel R s'écrit alors :

$$\overrightarrow{v}_{P'/R} = r\omega\overrightarrow{u}_\theta \tag{22}$$

Cette vitesse est proportionnelle à la distance à l'axe, et les points de l'axe ont bien sûr une vitesse nulle.



Le référentiel terrestre est défini par la Terre, considérée comme un système rigide. Un observateur lié au sol est aussi lié au référentiel terrestre, à condition que le sol ne bouge pas par rapport à la Terre. Le référentiel terrestre est en rotation quasi uniforme par rapport au référentiel géocentrique, avec une période égale au jour sidéral (23 heures, 56 minutes et 4 secondes).

3.b. Vecteur vitesse angulaire

La vitesse d'un point P' lié à R' peut s'écrire :

$$\vec{v}_{P'/R} = \omega \vec{u_z} \wedge \overrightarrow{HP'} \tag{23}$$

Le vecteur vitesse angulaire (ou vecteur rotation) est défini par :

$$\vec{\Omega} = \omega \vec{u_z} \tag{24}$$

Ce vecteur est colinéaire à l'axe de rotation, sa norme est égale à la valeur absolue de la vitesse angulaire, et sa direction dépend du sens de rotation. Si R' tourne dans le sens trigonométrique autour de l'axe Oz, alors le vecteur vitesse angulaire est orienté dans le sens de $\vec{u_z}$. Cela signifie que le référentiel R' tourne dans le sens direct autour du vecteur $\vec{\Omega}$.

On obtient donc la relation :

$$\vec{v}_{P'/R} = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{HP'} \tag{25}$$

qui a l'avantage de ne pas faire intervenir la base. Soit O un point fixe appartenant à l'axe de rotation. On a aussi :

$$\vec{v}_{P'/R} = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OP'} \tag{26}$$

Si A' et B' sont deux points liés au référentiel R', on déduit de la relation précédente la dérivée du vecteur $\overrightarrow{A'B'}$ dans le référentiel R :

$$\left(\frac{d\,\overrightarrow{A'B'}}{dt}\right)_R = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{A'B'} \tag{27}$$

En particulier, pour les vecteurs d'une base liée à R' on a :

$$\left(\frac{d\overrightarrow{u_{x'}}}{dt}\right)_R = \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{u_{x'}} \tag{28}$$

3.c. Composition des vitesses

Soit $(Ox'y'z')$ un repère lié à R'. L'origine O est un point de l'axe de rotation, fixe à la fois dans R et dans R'.

Pour dériver le vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans R, on utilise une base orthonormée liée à R' :

$$\overrightarrow{v}_{M/R} = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_R = \frac{d}{dt}\left(x'(t)\overrightarrow{u_{x'}} + y'(t)\overrightarrow{u_{y'}} + z'(t)\overrightarrow{u_{z'}}\right) \tag{29}$$

$$= \frac{dx'(t)}{dt}\overrightarrow{u_{x'}} + \frac{dy'(t)}{dt}\overrightarrow{u_{y'}} + \frac{dz'(t)}{dt}\overrightarrow{u_{z'}} \tag{30}$$

$$+ x'(t)\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{u_{x'}} + y'(t)\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{u_{y'}} + z'(t)\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{u_{z'}} \tag{31}$$

$$= \overrightarrow{v}_{M/R'} + \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM} \tag{32}$$

On obtient ainsi :

$$\overrightarrow{v}_{M/R} = \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{v}_{M/R'} \tag{33}$$

Soit P' le point lié à R' et coïncidant avec M à l'instant t. Sa vitesse dans R est :

$$\overrightarrow{v}_{P'/R} = \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM} \tag{34}$$

C'est la vitesse d'entraînement du point matériel M par le référentiel R'. La relation de composition des vitesses s'écrit finalement (comme pour la translation) :

$$\overrightarrow{v}_{M/R} = \overrightarrow{v}_e(M) + \overrightarrow{v}_{M/R'} \tag{35}$$

La vitesse d'entraînement est la vitesse dans R du point P' lié à R' et coïncidant avec le point matériel à l'instant t.

On remarque que la relation ci-dessus est formellement identique à celle établie pour un référentiel en translation. La différence est que la vitesse d'entraînement à l'instant t dépend de la position du point matériel dans l'espace, alors qu'elle en est indépendante pour un mouvement de translation.

Pour un mouvement de rotation, la vitesse d'entraînement dépend de la position du point M par rapport à l'axe de rotation. Pour la calculer, il suffit de remarquer que c'est la vitesse du point coïncidant, qui décrit un cercle de rayon $r = HM$ à la vitesse angulaire ω. En utilisant les coordonnées cylindriques autour de l'axe de rotation, la vitesse d'entraînement s'écrit :

$$\overrightarrow{v}_e(M) = r\omega\overrightarrow{u_\theta} \tag{36}$$

La norme de la vitesse d'entraînement est donc proportionnelle à la distance à l'axe.

3.d. Composition des accélérations

Dérivons la relation (33) par rapport au temps, dans le référentiel R, en remarquant que le vecteur vitesse angulaire est constant :

$$\vec{a}_{M/R} = \vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{M/R} + \left(\frac{d\vec{v}_{M/R'}}{dt}\right)_R \tag{37}$$

Pour dériver le vecteur $\vec{v}_{M/R'}$ dans le référentiel R, on utilise la même méthode que ci-dessus avec le vecteur position, consistant à le décomposer sur la base liée à R' :

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{v}_{M/R'}}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{x'(t)}{dt}\vec{u_{x'}} + \frac{dy'(t)}{dt}\vec{u_{y'}} + \frac{z'(t)}{dt}\vec{u_{z'}}\right) && (38)\\
&= \frac{d^2x'(t)}{dt^2}\vec{u_{x'}} + \frac{d^2y'(t)}{dt^2}\vec{u_{y'}} + \frac{d^2z'(t)}{dt^2}\vec{u_{z'}} && (39)\\
&\quad + \frac{x'(t)}{dt}\vec{\Omega} \wedge \vec{u_{x'}} + \frac{dy'(t)}{dt}\vec{\Omega} \wedge \vec{u_{y'}} + \frac{z'(t)}{dt}\vec{\Omega} \wedge \vec{u_{z'}} && (40)\\
&= \vec{a}_{M/R'} + \vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{M/R'} && (41)
\end{aligned}$$

En utilisant la composition des vitesses, on obtient finalement :

$$\vec{a}_{M/R} = \vec{\Omega} \wedge \vec{v}_e(M) + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{M/R'} + \vec{a}_{M/R'} \tag{42}$$

Le premier terme peut être explicité en utilisant les coordonnées cylindriques :

$$\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_e(M) = -r\omega^2\vec{u_r} \tag{43}$$

Il s'agit donc de l'accélération dans R du point lié à R' et coïcidant avec M à l'instant considéré. C'est l'accélération d'entraînement.

Le deuxième terme fait intervenir la vitesse dans le référentiel en rotation ; c'est l'accélération de Coriolis :

$$\vec{a_c}(M) = 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{M/R'} \tag{44}$$

Finalement, la relation de composition des accélérations s'écrit :

$$\vec{a}_{M/R} = \vec{a}_e(M) + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{M/R'} + \vec{a}_{M/R'} \tag{45}$$

L'accélération d'entraînement est l'accélération dans R du point P' lié à R' et coïncidant avec le point matériel à l'instant t considéré.

On retiendra l'expression de l'accélération de Coriolis. L'accélération d'entraînement se calcule aisément sachant que c'est l'accélération du point coïncidant. Il faut bien noter que l'accélération d'entraînement n'est pas la dérivée de la vitesse d'entraînement par rapport au temps. En effet, il faut dériver l'expression (36) à r constant, alors qu'en général $r(t)$ dépend du temps.

La formule de composition des accélérations ci-dessus est la formule générale, valable en fait pour tout mouvement de référentiel. Pour une vitesse angulaire nulle, l'accélération de Coriolis est nulle et on retrouve la formule de composition valable pour les mouvements de translation.