Filtres passe-bas de Butterworth

1. Étude théorique

1.a. Définition

Soit ω_0 la pulsation de coupure à -3 dB du filtre passe-bas. On pose :

$$x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

Un filtre de Butterworth d'ordre n a le gain suivant (à une constante multiplicative près) :

$$|H| = \frac{1}{\sqrt{1+x^{2n}}}$$

Le gain présente donc une décroissance de $-20ndB$ par décade pour $x > 1$.

1.b. Fonction de transfert

On pose $s = jx$ et on cherche une transmittance de Laplace $T(s)$ vérifiant la définition ci-dessus. On se place dans le cas où n est pair et on pose $n = 2p$.

Pour cela, on factorise le polynôme

$$P(x) = 1 + x^{2n}$$

Ces coefficients étant réels, si a est une racine alors son conjugué a^* l'est aussi. P se factorise donc en polynômes du second degré de la forme :

$$\begin{aligned}
&(x-a)(x-a^*)\\
=&(s-ja)(s^*+ja^*)\\
=&|s-ja|^2
\end{aligned}$$

Afin d'obtenir un système stable, les pôles de T doivent avoir une partie réelle négative, i.e. $Re(ja) < 0$ ou $Im(a) > 0$. Notons a_i les n racines dont la partie imaginaire est positive et posons $r_i = ja_i$. La transmittance recherchée est :

$$T(s) = \frac{1}{(s-r_1)(s-r_2)\cdots}$$

Le polynôme P étant pair, si a est racine, $-a$ l'est aussi. Les $n = 2p$ racines r_i peuvent donc être regroupées par paire de conjuguées. Le dénominateur de H est donc un produit de p polynôme du second ordre de la forme :

$$(s-r_i)(s-r_i^*) = s^2 - 2Re(r_i)s + |r_i|^2$$

Calculons explicitement les $2n$ racines du polynôme P :

$$\begin{aligned}
&x_k = \exp j\left(\frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n}\right)\\
&k = 0, 1 \cdots 2n-1
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$r_k = \exp j\left(\frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{2}\right)$$

Les solutions de partie réelle négative sont obtenues pour $k = 0, 1, \cdots n-1$. Les paires de conjugées sont $(r_0, r_{n-1}$, (r_1, r_{n-2}), etc. On a finalement :

$$\begin{aligned} &|r_k| = 1 \\ &-2Re(r_k) = -2\cos\left(\frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

pour $k = 0, 1 \cdots p-1$.

La fonction Mathematica suivante calcule la transmittance de Laplace (de gain unitaire dans la bande passante)

```
butterworth[p_]:=Module[{},
    n = 2*p;
    denom = 1;
    For[k=0,k<p,k++,
        c=-2*Cos[Pi/(2*n)+k*Pi/n+Pi/2];
        denom = denom*(s^2+c*s+1);
    ];
    Return[1/denom];
]
```

Exemple pour $p = 3$:

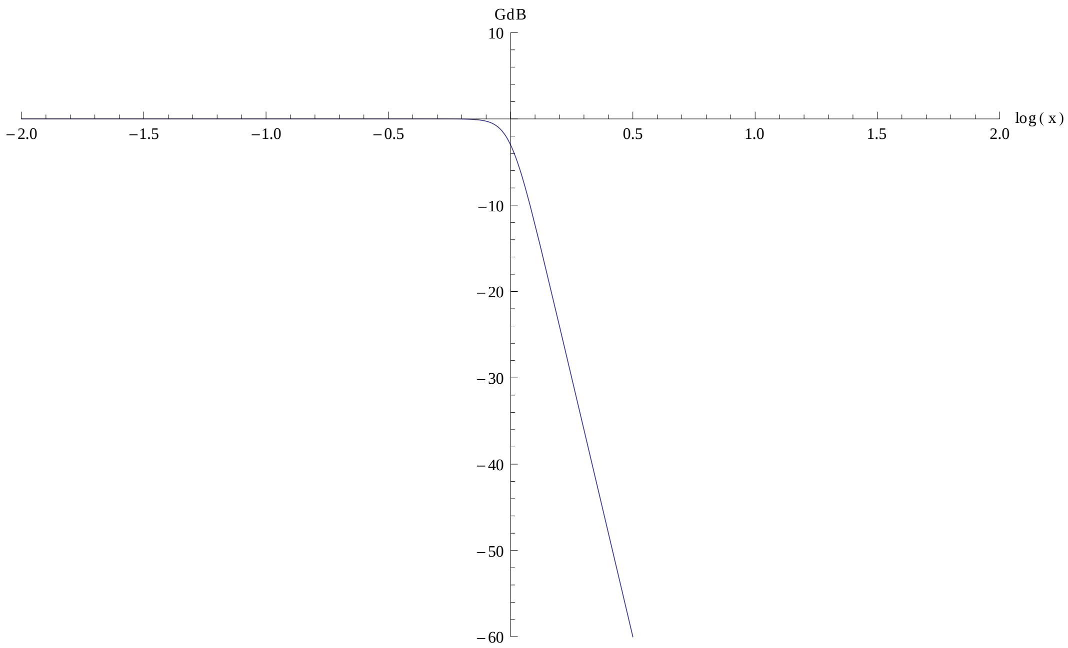
```
T=butterworth[3]
```

$$\frac{1}{\left(s^2+\sqrt{2}s+1\right)\left(s^2+\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)s}{\sqrt{2}}+1\right)\left(s^2+\frac{\left(1+\sqrt{3}\right)s}{\sqrt{2}}+1\right)}$$

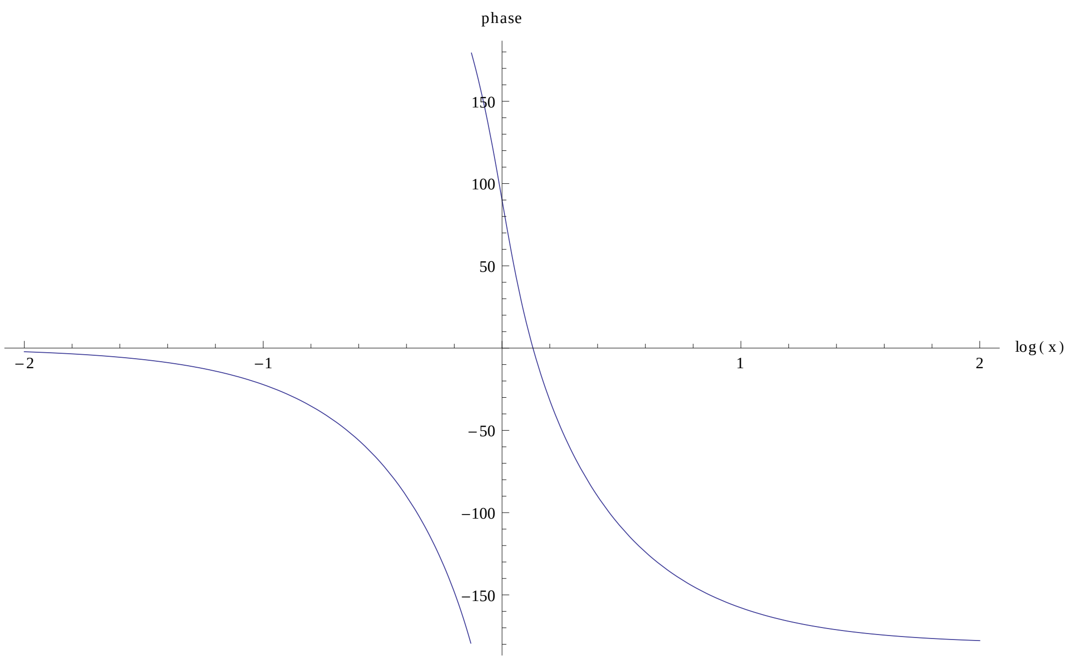
La fonction de transfert et le diagramme de Bode :

```
H[x_]:=T/.s->I*x;
GdB[x_]:=20*Log[10,Abs[H[x]]];
phase[x_]:=Arg[H[x]]*180/Pi;
```

```
Plot[GdB[10^lx],{lx,-2,2},AxesLabel->{"log(x)","GdB"},
                              PlotRange->{{-2,2},{-60,10}}]
```




```
Plot[phase[10^lx],{lx,-2,2},AxesLabel->{"log(x)","phase"}]
```

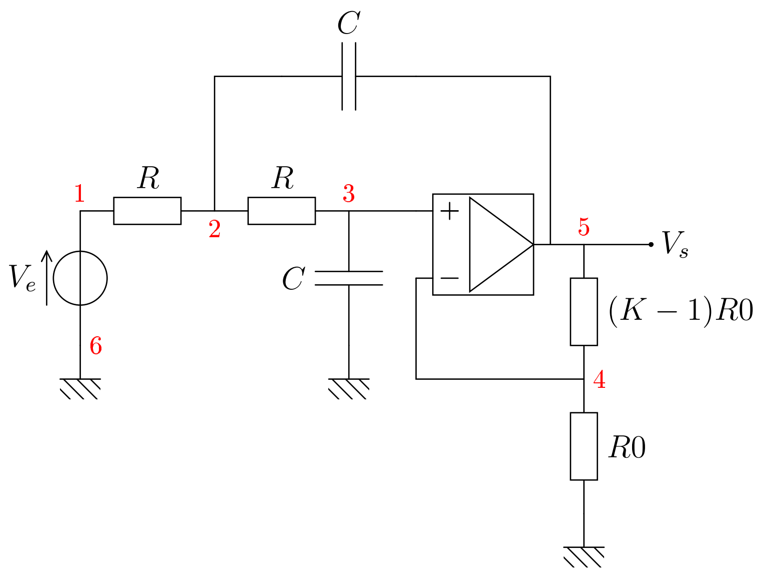


2. Réalisation

2.a. Association de filtres actifs

La décomposition de la fonction de transfert obtenue plus haut montre que le filtre de Butterworth peut être obtenu par association en série de filtres actifs.

Consisérons comme exemple la cellule du second ordre suivante :



Il s'agit d'une structure de Sallen et Key avec un amplificateur de tension de gain K. En pratique, on utilisera un potentiomètre pour ajuster ce gain.

Pour calculer ce circuit, on utilise le module Mathematica simulineaire.m :

```
Get["../simulin/simulineaire.m"];
```

Définition du circuit, avec g le gain en boucle ouverte de l'amplificateur :

```
filtre[r_,c_,k_,g_]:=Module[{},
    n=6;
    A=Table[0,{n},{n}];
    B=Table[0,{n}];
    A=ajouterResistance[A,1,2,r];
    A=ajouterResistance[A,2,3,r];
    A=ajouterResistance[A,5,4,(k-1)*r0];
    A=ajouterResistance[A,4,6,r0];
    A=ajouterCapacite[A,2,5,c];
    A=ajouterCapacite[A,3,6,c];
    {A,B}=ajouterSourceTensionSTCT[A,B,5,6,3,4,g];
    {A,B}=ajouterMasse[A,B,6];
    {A,B}=definirEntree[A,B,1];
    Return[{A,B}];
]
```

Calcul de la transmittance de Laplace :

```
{A,B}=filtre[R,C,K,g];
T=transfert[A,B,5]
```

$$\frac{gK}{C^2gR^2s^2 + C^2KR^2s^2 - CgKRs + 3CgRs + 3CKRs + g + K}$$

La pulsation de coupure est

$$\omega_0 = \frac{1}{RC}$$

En reprenant le changement de variable défini au 1.a et en prenant la limite $g \to \infty$, on obtient :

$$T(s) = \frac{K}{s^2 + (3-K)s + 1}$$

Pour obtenir un filtre de Butterworth d'ordre $n = 2p$, on associe en série p cellules comme celle-ci. Le coefficient K_i de la cellule i est donné par :

$$3 - K_i = -2\cos\left(\frac{\pi}{2n} + i\frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{2}\right)$$

Voici par exemple les coefficients pour $p = 2$:

```
p=2;
n=2*p;
K=Table[N[3+2*Cos[Pi/(2*n)+i*Pi/n+Pi/2]],{i,0,p-1}]
```

```
{2.2346331352698203, 1.1522409349774265}
```

et pour $p = 3$:

```
p=3;
n=2*p;
K=Table[N[3+2*Cos[Pi/(2*n)+i*Pi/n+Pi/2]],{i,0,p-1}]
```

```
{2.4823619097949585, 1.5857864376269049, 1.0681483474218636}
```

Ces coefficients (gain de l'amplificateur) permettent de réaliser un filtre de Butterworth d'ordre 6 avec 3 cellules en série. Les cellules sont placées par ordre de gain croissant.