Ondes électromagnétiques dans le vide

1. Équation des ondes

1.a. Définition

L'équation des ondes est une équation à dérivées partielles. Pour un champ scalaire $u(x,y,z,t)$, elle s'écrit :

$$\boxed{\nabla^2 u = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}} \tag{1}$$

La constante c est une vitesse, appelée *célérité*. Cette équation est aussi appelée *équation de d'Alembert*. Une solution de cette équation est appelée *fonction d'onde*.

Une *onde plane* est par définition une onde qui ne dépend que d'une abscisse x sur un axe. L'équation des ondes s'écrit alors :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{2}$$

Une propriété importante de cette équation est sa linéarité : une combinaison linéaire de solutions est aussi solution de l'équation.

1.b. Ondes planes progressives

Par définition, une onde plane progressive se propageant dans le sens de x croissant est de la forme :

$$u_+(x,t) = F(x-ct) \tag{3}$$

où $F(x)$ est une fonction de la variable d'espace définissant la forme d'onde. La forme progresse sans se déformer à la célérité c. On vérifie que cette fonction est bien une solution de l'équation des ondes.

Une onde progressive se propageant dans le sens de x décroissant est de la forme :

$$u_-(x,t) = G(x+ct) \tag{4}$$

La solution générale de l'équation des ondes (2) est une somme de deux ondes progressives se propageant en sens inverse :

$$u(x,t) = F(x-ct) + G(x+ct) \tag{5}$$

Lorsque les deux ondes se rencontrent, la somme des deux fonctions d'onde produit un phénomène *d'interférence*. La somme de deux ondes progressives se propageant en sens inverse n'est pas une onde progressive. Il existe donc des solutions de l'équation des ondes non progressives.

1.c. Ondes planes progressives sinusoïdales

Une onde plane progressive sinusoïdale est une onde plane progressive dont la forme d'onde est une sinusoïde :

$$F(x) = A\cos(\frac{2\pi x}{\lambda}) \tag{6}$$

La manière générale d'écrire cette onde est la suivante :

$$u_+(x,t) = A\cos(kx-\omega t) \tag{7}$$

Le nombre d'onde k est lié à la longueur d'onde λ par la relation :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{8}$$

La pulsation ω est liée à la période T par la relation :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \tag{9}$$

Pour que cette fonction soit solution de l'équation des ondes, il faut et il suffit que

$$k = \frac{\omega}{c} \tag{10}$$

L'axe X est la *direction de propagation* de cette onde. Une onde plane progressive sinusoïdale solution de l'équation générale (1) est obtenue en introduisant le vecteur d'onde :

$$\overrightarrow{k} = \frac{2\pi}{\lambda}\overrightarrow{u} \tag{11}$$

Le vecteur unitaire $\overrightarrow{u}$ donne la direction et le sens de propagation. Pour obtenir l'abscisse x sur l'axe de propagation, on doit faire une projection orthogonale sur cette axe. On a ainsi :

$$kX = \overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{r} \tag{12}$$

où l'on a introduit le vecteur position, défini sur une base orthonormée par :

$$\overrightarrow{r} = x\,\overrightarrow{u}_x + y\,\overrightarrow{u}_y + z\,\overrightarrow{u_z} \tag{13}$$

Pour faciliter les calculs, on introduit une fonction d'onde complexe dont la partie réelle est la fonction d'onde. Voici finalement l'expression d'une onde plane progressive sinusoïdale en notation complexe :

$$\boxed{\underline{u}(\overrightarrow{r},t) = Ae^{i(\overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{r}-\omega t)}} \tag{14}$$

Dans cette expression, la constante A peut être complexe. L'argument de A introduit un déphasage qui peut être utile dans certains calculs.

▷ Exercice : Calculer le laplacien de cette fonction et montrer qu'elle vérifie bien l'équation (1) si $k = \omega/c$.

Par définition, la phase d'une onde plane progressive sinusoïdale est :

$$\phi(x,t) = \overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{r} - \omega t \tag{15}$$

On appelle surface de phase une surface définie à l'instant t par une phase constante. Pour une onde plane, les surfaces de phase sont des plans perpendiculaires au vecteur d'onde.

On définit la *vitesse de phase* comme la vitesse de déplacement d'un plan de phase donné. Pour une solution de l'équation (1), la vitesse de phase est égale à la célérité c.

On remarque que la dépendance temporelle comporte un signe moins. Il s'agit d'une convention. On aurait pu définir la phase opposée, car la partie réelle de la fonction d'onde ne dépend pas du signe de la phase. Avec notre convention, la dérivée par rapport au temps s'écrit :

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} = -i\omega\,\underline{u} \tag{16}$$

La dérivée seconde est en revanche indépendante de la convention de signe :

$$\frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial t^2} = -\omega^2\,\underline{u} \tag{17}$$

1.d. Ondes planes progressives périodiques

La série de Fourier permet de construire une onde plane progressive périodique en combinant linéairement des ondes planes progresives sinusoïdales. Voici, en notation complexe, l'expression d'une onde plane progressive périodique comportant P harmoniques :

$$\underline{F}(x) = \sum_{n=1}^{P} A_n e^{i(nk_1 x)} \tag{18}$$

$$\underline{u}_+(x,t) = \sum_{n=1}^{P} A_n e^{i(nk_1 x - n\omega_1 t)} \tag{19}$$

où l'on a défini la pulsation et le nombre d'onde fondamentals par :

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T} \tag{20}$$

$$k_1 = \frac{\omega_1}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{21}$$

Le nombre complexe A_n est l'amplitude de l'harmonique de rang n. La fonction d'onde ainsi définie obéit bien à l'équation (1) puisqu'il s'agit d'une combinaison linéaire de solutions de cette équation.

Voici un exemple avec trois harmoniques :

1.e. Modulation d'amplitude

Considérons un spectre comportant seulement deux raies voisines, de fréquences grandes par rapport au fondamental. Les harmoniques sont de rang N et $N+1$. Il s'agit de la somme de deux ondes progressives sinusoïdales dont les fréquences sont très voisines. Voici un exemple :

On obtient ainsi une porteuse, de fréquence N, modulée en amplitude. La fréquence de la modulation est égale à l'écart entre les deux raies du spectre. En ajoutant d'autres raies au voisinage de celle de la porteuse, on arrive a des modulations de formes différentes. La modulation d'amplitude peut être utilisée pour transmettre des informations par onde électromagnétique.

1.f. Paquets d'ondes

En augmentant le nombre de raies et en les disposant symétriquement par rapport à la fréquence de la porteuse N, on arrive à une onde concentrée en paquets. Voici un exemple :

Ce type d'onde est généré dans les laser à impulsions. Par exemple, les lasers femtosecondes produisent des impulsions de lumière dont la durée est de l'ordre de $10^{-15}\ s$.

2. Ondes électromagnétiques planes progressives monochromatiques

2.a. Relation de dispersion

Nous avons vu que l'équation de propagation vérifiée par le champ électrique dans le vide est l'équation des ondes vectorielle (ou équation de d'Alembert vectorielle) :

$$\nabla^2 \overrightarrow{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{\partial t^2} \tag{22}$$

Par définition, une onde plane progressive monochromatique est une onde dont le champ électrique a la forme suivante (champ complexe) :

$$\boxed{\underline{\overrightarrow{E}}(\overrightarrow{r}, t) = \underline{\overrightarrow{E}}_0 e^{i(\overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{r} - \omega t)}} \tag{23}$$

L'adjectif *monochromatique* (une seule couleur) est synonyme de *sinusoïdal* ou de *harmonique*. Ce champ est solution de l'équation des ondes si et seulement si :

$$\boxed{k = \frac{\omega}{c}} \tag{24}$$

La relation entre la pulsation et le nombre d'onde est appelée *relation de dispersion*. L'équation ci-dessus est la relation de dispersion dans le vide. Cette notion prendra tout son sens pour une onde électromagnétique se propageant dans un milieu dont la relation de dispersion est différente de celle du vide.

La relation de dispersion dans le vide peut aussi s'écrire entre la longueur d'onde et la période :

$$\lambda = cT \tag{25}$$

La vitesse de phase est la vitesse de déplacement des plans de phase :

$$V_\phi = \frac{\omega}{k} = c \tag{26}$$

Cela signifie que dans le vide toutes les ondes électromagnétiques se propagent à la même vitesse de phase, quelle que soit leur fréquence. La constante c est donc la vitesse de la lumière dans le vide.

2.b. Structure vectorielle

Le vecteur d'onde donne la direction et le sens de propagation de l'onde progressive. Écrivons explicitement le champ électrique en coordonnées cartésiennes :

$$\underline{\overrightarrow{E}}(\overrightarrow{r}, t) = \underline{\overrightarrow{E}}_0 e^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)} \tag{27}$$

Considérons la divergence du champ électrique, qui doit être nulle :

$$div\,\overrightarrow{\underline{E}} = \frac{\partial \underline{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \underline{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial z} = i(\underline{E}_{0x}k_x + \underline{E}_{0y}k_y + \underline{E}_{0z}k_z)e^{i(\overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{r}-\omega t)} = i\,\overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{\underline{E}} \tag{28}$$

ce qui conduit à :

$$\overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{\underline{E}} = 0 \tag{29}$$

Le champ électrique est donc perpendiculaire à la direction de propagation. L'onde plane progressive monochromatique dans le vide est *transversale* pour le champ électrique.

Pour déterminer le champ magnétique, on utilise l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\frac{\partial \overrightarrow{\underline{B}}}{\partial t} = -\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{\underline{E}} = -i\,\overrightarrow{k}\wedge\overrightarrow{\underline{E}} \tag{30}$$

L'intégration par rapport au temps donne :

$$\overrightarrow{\underline{B}}(\overrightarrow{r},t) = \frac{\overrightarrow{k}\wedge\overrightarrow{\underline{E}}}{\omega} \tag{31}$$

Une éventuelle constante d'intégration n'a pas été écrite, car on s'intéresse seulement à la partie variable du champ. En pratique, il peut bien sûr y avoir un champ magnétostatique en plus, par exemple le champ magnétique terrestre. Néanmoins, celui-ci n'a aucun effet sur la propagation d'une onde électromagnétique dans le vide. En introduisant le vecteur unitaire donnant la direction et le sens de propagation, la relation s'écrit :

$$\overrightarrow{\underline{B}} = \frac{\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{\underline{E}}}{c} \tag{32}$$

On en déduit que le champ magnétique est à la fois perpendiculaire à la direction de propagation et au champ électrique. La structure de l'onde plane progressive monochromatique dans le vide se résume ainsi :

- ▷ Les champs électrique et magnétique sont perpendiculaires à la direction de propagation.
- ▷ Le trièdre $(\overrightarrow{E},\overrightarrow{B},\overrightarrow{k})$ est direct.
- ▷ Le champ magnétique oscille en phase avec le champ électrique et $B = E/c$.

2.c. Polarisation rectiligne

La polarisation d'une onde électromagnétique est la direction du champ électrique. En général, le champ électrique est perpendiculaire à la direction de propagation mais sa direction n'est pas fixe. On s'intéresse au cas particulier d'une *polarisation rectiligne*, pour laquelle le champ électrique a une direction fixe.

On peut, sans perte de généralité, considérer que la direction de propagation coïncide avec l'axe X et la direction de polarisation avec l'axe Y. On a alors :

$$\underline{E}_y(x,t) = E_0 e^{i(kx-\omega t)} \tag{33}$$

$$\underline{B}_z(x,t) = \frac{E_0}{c} e^{i(kx-\omega t)} \tag{34}$$

Les champs réels sont finalement :

$$E_y(x,t) = E_0 \cos(kx - \omega t) \tag{35}$$
$$B_z(x,t) = \frac{E_0}{c} \cos(kx - \omega t) \tag{36}$$

▷ Exercice : Écrire les champs pour la même onde se propageant en sens inverse, dans le sens x décroissant.

L'animation onde électromagnétique progressive montre une onde de polarisation rectiligne et d'autres types de polarisation, où le champ électrique tourne dans le plan perpendiculaire à la direction de propagation.

2.d. Puissance rayonnée

L'onde plane progressive monochromatique transporte de l'énergie. Pour le voir, calculons son vecteur de Poynting. Celui-ci étant un produit de deux champs, il doit être calculé à partir des grandeurs réelles :

$$\overrightarrow{\pi} = \frac{\overrightarrow{E} \wedge \overrightarrow{B}}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(kx - \omega t)\overrightarrow{u_x} \tag{37}$$

D'après le théorème de poynting, le flux sortant du vecteur de Poynting à travers une surface fermée (délimitant un volume) est égal à l'énergie électromagnétique qui sort du volume par unité de temps. Dans une région de l'espace traversée par une onde électromagnétique, on peut attribuer une signification physique au flux du vecteur de Poynting à travers une surface ouverte orientée : c'est la puissance rayonnée à travers cette surface.

Le vecteur de Poynting indique localement la direction et le sens de propagation de l'énergie, de manière analogue au vecteur densité de courant pour le courant électrique. Dans le vide, le vecteur de Poynting est colinéaire à la direction de propagation. L'énergie se propage donc perpendiculairement aux plans de phase.

Lorsque la fréquence de l'onde est très élevée, on s'intéresse surtout à la moyenne sur une période du vecteur de Poynting, définie par :

$$<\overrightarrow{\pi}> = \frac{1}{T}\int_0^T \overrightarrow{\pi}\, dt \tag{38}$$

On obtient :

$$<\overrightarrow{\pi}> = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}\overrightarrow{u_x} \tag{39}$$

Pour une onde plane progressive monochromatique, la densité de flux d'énergie est donc, en moyenne, un champ uniforme. Considérons alors une surface orientée d'aire A dont la normale fait un angle θ avec le vecteur d'onde. Une telle surface peut être la surface réceptrice d'un capteur sensible à la puissance. La puissance moyenne reçue par cette surface est :

$$<P> = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} A\cos\theta \tag{40}$$

Le flux d'énergie est bien sûr maximal lorsque l'angle est nul.

▷ Exercice : Le rayonnement solaire au niveau du sol a environ une puissance de $1000\ W/m^2$ mesurée perpendiculairement aux rayons solaires. Calculer l'intensité du champ électrique de l'onde. Calculer aussi celle du champ magnétique et comparer au champ magnétique terrestre.

3. Spectre des ondes électromagnétiques et applications

Spectre des ondes électromagnétiques et applications