Équations de Maxwell

1. Champ électromagnétique

Dans ce chapitre, on considère le cas général de champs dépendant du temps :

- ▹ Densité volumique de charge $\rho(x, y, z, t)$.
- ▹ Densité de courant volumique $\overrightarrow{j}(x, y, z, t)$
- ▹ Champ électrique $\overrightarrow{E}(x, y, z, t)$
- ▹ Champ magnétique $\overrightarrow{B}(x, y, z, t)$

En régime variable, les phénomènes électriques et magnétiques sont couplés. On parle donc de *champ électromagnétique*.

Le champ électromagnétique permet de calculer les forces que des particules chargées exercent sur d'autres particules. Pour cela, on considère les charges *sources* du champ électromagnétique, données par leur densité de charge et de courant. Le champ électromagnétique généré par ces sources agit sur toute particule chargée avec la force de Lorentz :

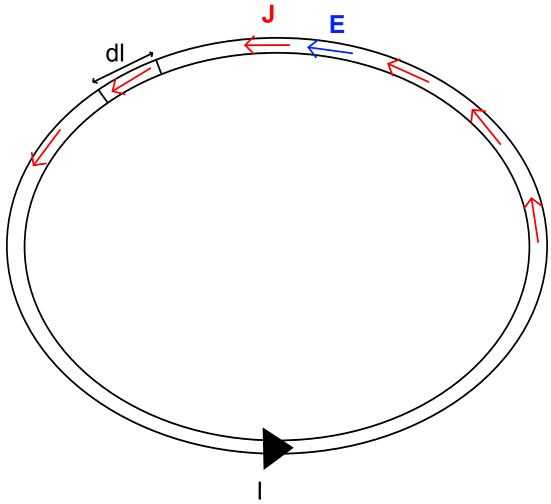
$$\boxed{\overrightarrow{f} = q(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}) \qquad (1)}$$

Le champ électrique, et dans une moindre mesure le champ magnétique, dépendent du référentiel dans lequel la vitesse de la particule est considérée.

2. Induction électromagnétique

2.a. Force électromotrice

Considérons un conducteur filiforme formant un circuit fermé, que l'on représente par une courbe fermée orientée C. On se place dans le cas d'un circuit immobile dans le référentiel. Il y a en général dans ce conducteur un champ électromagnétique, constitué d'un champ électrique $\overrightarrow{E}$ et d'un champ magnétique $\overrightarrow{B}$ (il s'agit de champs moyens, ressentis en moyenne par les charges mobiles).



La force électromagnétique qu'une charge mobile positive ressent comporte une partie électrique et une partie magnétique, qui dépend de sa vitesse moyenne dans le référentiel :

$$\overrightarrow{F}_+ = q_+(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{v}_+ \wedge \overrightarrow{B}) \tag{2}$$

Il y a bien sûr une relation analogue pour les porteurs négatifs. La force magnétique est perpendiculaire à la vitesse de la charge. Dans un circuit filiforme au repos, les charges se déplacent en moyenne tangentiellement à la courbe C, donc la force est perpendiculaire à la courbe. Cette force magnétique sur les porteurs donne naissance à une force globale sur le conducteur (force de Laplace), mais n'a pas d'effet sur le courant électrique.

La puissance reçue par les charges localement, par unité de volume de conducteur est donc :

$$p = n_+q_+(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{v}_+ \wedge \overrightarrow{B}) \cdot \overrightarrow{v_+} + n_-q_-(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{v}_- \wedge \overrightarrow{B}) \cdot \overrightarrow{v_-} \tag{3}$$

$$= \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{E} \tag{4}$$

La densité volumique de puissance reçue par les charges mobiles de la part du champ électromagnétique est :

$$p = \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{E} \tag{5}$$

Considérons à présent un élément de fil de longueur dl. La puissance reçue par les charges dans cet élément est :

$$dP = I\overrightarrow{t}dl \cdot \overrightarrow{E} \tag{6}$$

En régime quasi stationnaire, l'intensité du courant est la même sur tout le circuit. Il s'en suit que la puissance reçue par les charges sur la totalité du circuit s'écrit comme la circulation suivante :

$$P = I \oint_C \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{t}\, dl \tag{7}$$

On voit ainsi que les charges ne peuvent recevoir de l'énergie que si la circulation du champ électrique sur la courbe fermée définissant ce circuit est non nulle. Un champ électrostatique ne peut donc fournir cette énergie. Un champ électrique dont la circulation sur une courbe fermée est non nulle est appelé *champ électromoteur*.

On définit la force électromotrice sur le circuit par :

$$e = \oint_C \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{t}\, dl \tag{8}$$

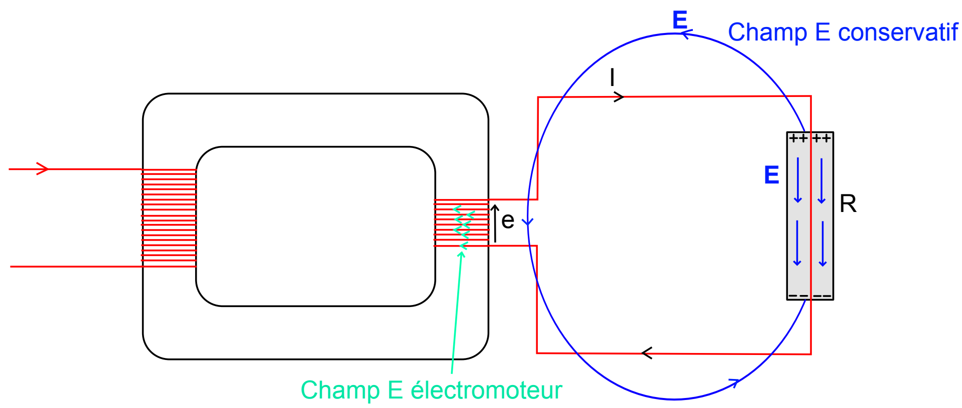
La force électromotrice est en fait une énergie par unité de charge. Elle s'exprime donc en Volts. Le mot *force* doit être entendu au sens de l'électrocinétique, et non pas au sens de la mécanique.

Finalement, la puissance reçue est :

$$P = Ie \tag{9}$$

conformément à l'expression électrocinétique de la puissance délivrée par un générateur de force électromotrice e qui fournit un courant I.

La force électromotrice peut être électrochimique (dans une pile) ou inductive. Un exemple est la force électromotrice qui se développe dans le circuit secondaire d'un transformateur. La figure suivante montre un exemple simple, avec une résistance dans le circuit secondaire. La force électromotrice est produite seulement dans la bobine du transformateur.



Il y a aussi un champ électrique conservatif qui apparaît à cause de la résistance (on néglige celle des fils), mais ce champ ne contribue pas à l'intégrale sur la courbe fermée. La figure représente sommairement ce champ pour une alternance positive de la force électromotrice. Le champ électrique à l'extérieur de la résistance est approximativement de type dipolaire. La force électromotrice permet aux charges de remonter le potentiel dans la bobine, alors qu'elles suivent les potentiels décroissants dans la résistance.

2.b. Loi de Faraday et forme locale

Lorsqu'un circuit est soumis à un flux magnétique variable, une force électromotrice apparaît.

Les expériences menées par Faraday (physicien et chimiste britannique 1791-1867), l'ont conduit à découvrir une relation entre la force électromotrice et la variation du flux.

Loi de Faraday :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} \tag{10}$$

où Φ est le flux magnétique à travers une surface orientée ouverte délimitée par la courbe définissant le circuit. Nous avons vu précédemment que ce flux ne dépend que de la courbe, pas de la surface choisie (conservation du flux magnétique).

Écrivons la loi de Faraday explicitement avec le champ électromagnétique :

$$\oint_C \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{t}\, dl = -\frac{d}{dt} \iint_S \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{n}\, dS \tag{11}$$

Comme le circuit est immobile, on peut l'écrire aussi :

$$\oint_C \overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{t}\,dl = -\iint_S \frac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t}\cdot\overrightarrow{n}\,dS \tag{12}$$

Une étape conceptuelle importante a été apportée par Maxwell (physicien écossais 1831-1879), qui considéra que cette relation devait être valable quelque soit la courbe C fermée, même en l'absence de circuit conducteur. En utilisant le théorème de Stokes, la circulation du champ électrique sur la courbe fermée est remplacée par le flux de son rotationnel sur la surface :

$$\iint_S \overrightarrow{rot}\,(\overrightarrow{E})\cdot\overrightarrow{n}\,dS = -\iint_S \frac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t}\cdot\overrightarrow{n}\,dS \tag{13}$$

Cette relation devant être vérifiée quelque soit la surface S, on en déduit une équation différentielle locale :

$$\boxed{\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{E} = -\frac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t} \qquad (14)}$$

Cette équation, due à Maxwell, exprime la forme locale de la loi de Faraday. Elle montre qu'un champ magnétique variable produit un champ électrique dont le rotationnel est non nul (contrairement au champ électrostatique). Il s'agit donc d'un champ électromoteur. Sa circulation sur un circuit fermé donne la force électromotrice. Nous avons là un premier exemple de couplage entre le champ électrique et le champ magnétique.

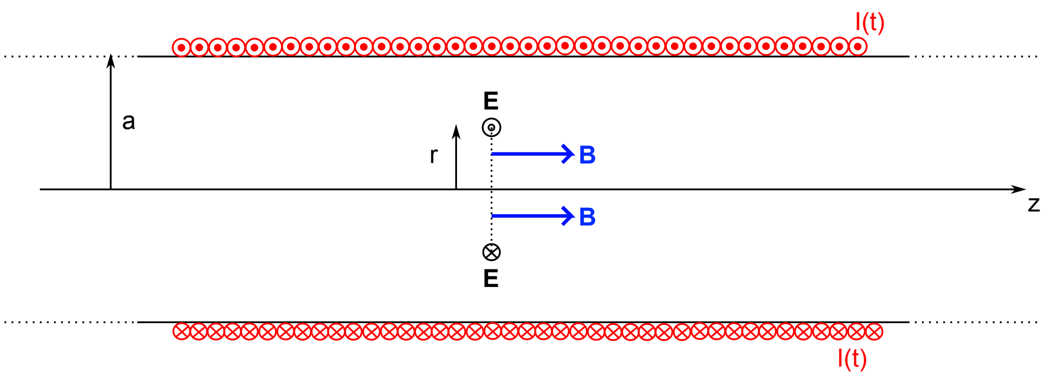
On remarque que l'équation fait intervenir le rotationnel d'un vecteur polaire, qui donne bien un vecteur axial.

2.c. Champ électrique induit

Un champ magnétique variable induit un champ électrique, qui peut être calculé avec la loi de Faraday, soit sous forme locale soit sous forme intégrale.

On considère comme exemple le champ à l'intérieur d'un solénoïde infini alimenté par un courant variable d'intensité $I(t)$. Dans le cadre du régime quasi stationnaire, le champ magnétique généré par ce courant peut être calculé avec le théorème d'Ampère. Le résultat obtenu en magnétostatique est donc toujours valable :

$$\overrightarrow{B} = \mu_0 n I(t)\overrightarrow{u}_z \tag{15}$$



Les plans contenant l'axe du solénoïde sont des plans d'antisymétrie du courant électrique ; ce sont donc des plans d'antisymétrie du champ électrique, car celui-ci est un vecteur polaire. En en déduit que le champ électrique induit est orthoradial. L'invariance par rotation autour de l'axe et par translation parallèlement à l'axe donne :

$$\overrightarrow{E} = E_\theta(r)\overrightarrow{u}_\theta \tag{16}$$

Pour obtenir l'expression du champ à l'intérieur du solénoïde, on écrit sa circulation sur un cercle de rayon r perpendiculaire à l'axe :

$$2\pi r E_\theta(r) = -\pi r^2 \frac{dB}{dt} \tag{17}$$

On a aussi utilisé le fait que le champ est uniforme pour calculer son flux à travers le cercle. On obtient finalement :

$$E_\theta = -\frac{r}{2}\frac{dB}{dt} \tag{18}$$

Si on place une spire conductrice (faite d'un fil très fin) coïncidant avec le cercle de rayon r, la circulation de ce champ est la force électromotrice qui apparaît dans cette spire.

On remarque qu'il y a aussi un champ électrique à l'extérieur du solénoïde :

$$E_\theta = -\frac{a^2}{2r}\frac{dB}{dt} \tag{19}$$

Une seconde bobine enroulée autour de la première permet donc d'obtenir une force électromotrice.

Si des charges statiques sont ajoutées au système, par exemple un fil chargé sur l'axe du solénoïde, il y a en plus un champ électrostatique conservatif qui ne contribue pas au rotationnel du champ électrique et donc n'a pas d'effet sur la force électromotrice dans une spire. Le champ total s'écrit alors :

$$\overrightarrow{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\overrightarrow{u}_r - \frac{r}{2}\frac{dB}{dt}\overrightarrow{u}_\theta \tag{20}$$

3. Conservation de la charge

3.a. Principe

La conservation de la charge électrique est un principe physique qui a toujours été vérifié dans les expériences, y compris dans les expériences de collisions entre particules relativistes réalisées dans les grands accélérateurs.

Principe de conservation de la charge : dans un système fermé (sans échange de matière avec l'extérieur), la quantité de charge totale est constante au cours du temps.

Lorsque le système n'est pas fermé, sa surface fermée S peut être traversée par des charges. Si $Q(t)$ est la quantité de charge totale du système, son augmentation par unité de temps, c'est-à-dire sa dérivée par rapport au temps, est égale au flux de charge entrant par la surface :

$$\frac{dQ}{dt} = -\iint_S \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{n}\, dS \tag{21}$$

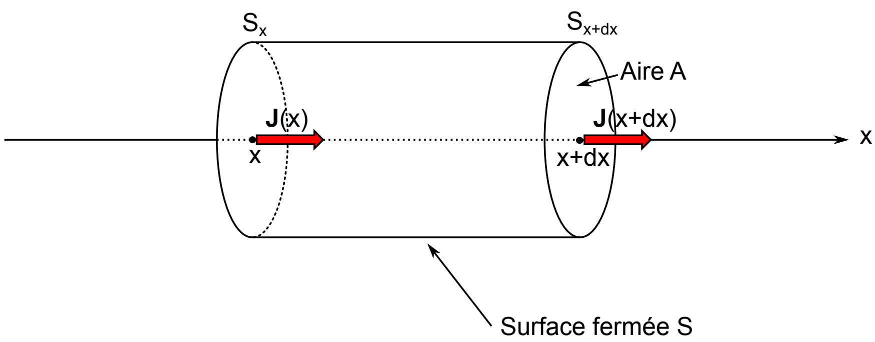
La normale sortante est utilisée pour exprimer le flux de la densité de courant.

3.b. Forme locale

Voyons comment s'exprime l'équation précédente dans un cas particulier, celui pour lequel la densité de courant a une direction fixe et ne dépend que d'une abscisse :

$$\overrightarrow{j} = j_x(x)\overrightarrow{u}_x \tag{22}$$

Considérons pour cela une surface cylindrique fermée dont les bases $S(x)$ et $S(x+dx)$ sont respectivement aux abscisses x et $x+dx$.



La quantité de charge à l'intérieur de cette surface est :

$$\delta Q(t) = \rho(x,t)A\,dx \tag{23}$$

Le principe de conservation de la charge permet d'exprimer la dérivée de cette quantité de charge en fonction des flux de charge sur les faces traversées par un courant :

$$\frac{d(\delta Q)}{dt} = j_x(x,t)A - j_x(x+dx,t)A \tag{24}$$

On arrive ainsi à l'équation suivante :

$$\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} = -\frac{j_x(x+dx,t) - j_x(x,t)}{dx} \tag{25}$$

À la limite où dx tend vers zéro, le second membre est l'opposée de la dérivée partielle de la densité de courant par rapport à x. On obtient finalement :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j_x}{\partial x} = 0 \tag{26}$$

Cette équation constitue la forme locale de la conservation de la charge. Une forme générale est obtenue en transformant l'intégrale de surface en intégrale de volume dans l'équation (21) (théorème d'Ostrogradsky), et en exprimant Q sous forme d'une intégrale de volume :

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dv = -\iiint_V div\, \overrightarrow{j}\, dv \tag{27}$$

Cette égalité devant être vérifiée pour tout volume V, on obtient l'équation locale.

Le principe de conservation de la charge s'exprime sous forme d'une équation locale :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\, \overrightarrow{j} = 0 \tag{28}$$

3.c. Régime quasi stationnaire

Considérons la forme locale du théorème d'Ampère :

$$\overrightarrow{rot}\, \overrightarrow{B} = \mu_0\, \overrightarrow{j} \tag{29}$$

On vérifie facilement (en coordonnées cartésiennes) que la divergence du rotationnel d'un vecteur est nulle. Le théorème d'Ampère conduit donc à :

$$div\, \overrightarrow{j} = 0 \tag{30}$$

Cela montre que le théorème d'Ampère est en contradiction avec le principe de conservation de la charge. Cependant, l'équation précédente est valable lorsque les champs varient de manière suffisamment lente (on précisera plus loin).

Dans l'approximation des régimes quasi stationnaires (A.R.Q.S.)

$$div\, \overrightarrow{j} = 0 \tag{31}$$

Une conséquence importante de cette équation est la conservation du flux de charge. Dans l'exemple unidimensionnel traité plus haut, elle s'écrit :

$$\frac{\partial j_x}{\partial x} = 0 \tag{32}$$

La densité de courant est donc constante, indépendante de x. Plus généralement, l'intensité du courant électrique se conserve le long d'un tube de lignes de courant, de manière analogue à la conservation du flux magnétique. En particulier, l'intensité du courant électrique est la même en tout point d'un circuit filiforme fermé.

Le théorème d'Ampère est valable non seulement en magnétostatique mais aussi dans l'approximation des régimes quasi stationnaires. On peut donc l'utiliser pour calculer des champs magnétiques pour les courants de basse fréquence. Par exemple, pour une bobine donc la taille est de l'ordre de $10\,\mathrm{cm}$, l'A.R.Q.S. est valable jusqu'à une fréquence de l'ordre de $10\,\mathrm{MHz}$. En conséquence, les résultats établis en magnétostatique pour un courant stationnaire d'intensité I constante, restent valables dans l'A.R.Q.S. pour une intensité $I(t)$ variable. En dehors de l'A.R.Q.S., il manque un terme à la forme locale du théorème d'Ampère pour que la conservation de la charge soit vérifiée.

4. Équations de Maxwell

Maxwell (physicien écossais 1831-1879) a fait la synthèse des découvertes électromagnétiques expérimentales, en particulier celles d'Ampère et de Faraday, et donné un énoncé des lois sous forme d'équations différentielles locales. Il a aussi donné le terme manquant dans la forme locale du théorème d'Ampère et montré l'existence d'ondes électromagnétiques, qui a été confirmée expérimentalement par Hertz (physicien allemand 1857-1894) en 1888.

Les équations de Maxwell sont les équations locales que nous avons déjà énoncées, mais la forme locale du théorème d'Ampère est modifiée.

$$div\overrightarrow{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{33}$$

$$\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{E} = -\frac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t} \tag{34}$$

$$div\overrightarrow{B} = 0 \tag{35}$$

$$\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{B} = \mu_0\overrightarrow{j} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t} \tag{36}$$

En calculant la divergence de la dernière équation, on retrouve la forme locale de la conservation de la charge. Comme nous le verrons plus loin, le terme ajouté par Maxwell à cette équation permet de prévoir l'existence d'ondes électromagnétiques.

▷ Exercice : Obtenir les formes intégrales en utilisant les théorèmes d'Ostrogradsky et de Stokes.

Ces quatre équations permettent en principe de déterminer le champ électromagnétique en fonction des sources (densité de charge et de courant). Les propriétés de symétrie des champs déjà développées sont valables dans le cas général. On remarque à ce propos que chaque équation est soit une égalité entre deux grandeurs polaires, soit une égalité entre deux grandeurs axiales.

5. Équation de propagation dans le vide

L'apport important de Maxwell a été de montrer l'existence d'ondes électromagnétiques dans le vide. Considérons pour cela les équations de Maxwell dans le vide, c'est-à-dire en l'absence de charges et de courant :

$$div\overrightarrow{E} = 0 \tag{37}$$

$$\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{E} = -\frac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t} \tag{38}$$

$$div\overrightarrow{B} = 0 \tag{39}$$

$$\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{B} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t} \tag{40}$$

Afin d'obtenir une équation pour le champ électrique seulement, on calcule le rotationnel de la deuxième équation (loi de Faraday locale) et on utilise la dernière équation pour exprimer le rotationnel du champ magnétique :

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{E}) = -\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\overrightarrow{E}}{\partial t^2} \tag{41}$$

La divergence du rotationnel se développe avec la formule suivante (que l'on admet) :

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{E}) = \overrightarrow{grad}(div\,\overrightarrow{E}) - \nabla^2\overrightarrow{E} \tag{42}$$

Le second opérateur du membre de droite est l'opérateur laplacien appliqué à un vecteur. En coordonnées cartésiennes, le laplacien s'écrit :

$$\boxed{\nabla^2\overrightarrow{E} = \frac{\partial^2\overrightarrow{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\overrightarrow{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\overrightarrow{E}}{\partial z^2}} \tag{43}$$

On obtient finalement l'équation de propagation dans le vide :

$$\nabla^2\overrightarrow{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\overrightarrow{E}}{\partial t^2} \tag{44}$$

avec

$$c^2\epsilon_0\mu_0 = 1 \tag{45}$$

L'équation obtenue est *l'équation des ondes* (wave equation), appelée aussi *équation de d'Alembert*, du nom du mathématicien français (1717-1783). Lorsqu'une grandeur physique vérifie cette équation, il existe des ondes associées. C'est cette équation qui a permis à Maxwell de faire l'hypothèse que la lumière, dont la nature ondulatoire était bien connue, est une onde électromagnétique. La constante c apparaissant dans l'équation des ondes est la célérité de l'onde, qu'il convient donc d'identifier à la vitesse de la lumière dans le vide, dont la valeur exacte est :

$$c = 299\,792\,458\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1} \tag{46}$$

6. Régime sinusoïdal

6.a. Champs complexes

Les équations de Maxwell sont linéaires. Considérons la transformation suivante :

$$(\rho, \overrightarrow{j}) \rightarrow (\overrightarrow{E}, \overrightarrow{B}) \tag{47}$$

Il s'agit d'une transformation linéaire, analogue à la transformation effectuée par un filtre linéaire en électronique. Lorsque la densité de charge et de courant sont des fonctions périodiques du temps, on utilise leur série de Fourier. La linéarité de la transformation permet de ramener le calcul des champs à celui des composantes de Fourier. Il suffit donc d'étudier la transformation en régime sinusoïdal permament de pulsation ω. On introduit alors la notation complexe pour représenter les champs, par exemple :

$$\overrightarrow{E}(x,y,z,t) = Re(\underline{\overrightarrow{E}}(x,y,z)e^{-i\omega t}) \tag{48}$$

où $i^2 = -1$. Le champ indépendant du temps introduit est une amplitude complexe qui dépend seulement des variables d'espace. On obtient ainsi les équations de Maxwell en régime sinusoïdal permament :

$$div\underline{\overrightarrow{E}} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{49}$$
$$\overrightarrow{rot}\,\underline{\overrightarrow{E}} = i\omega\underline{\overrightarrow{B}} \tag{50}$$
$$div\underline{\overrightarrow{B}} = 0 \tag{51}$$
$$\overrightarrow{rot}\,\underline{\overrightarrow{B}} = \mu_0\underline{\overrightarrow{j}} - \mu_0\epsilon_0 i\omega\underline{\overrightarrow{E}} \tag{52}$$

Dans ces équations, il est sous-entendu que les champs sont complexes et ne dépendent que des variables d'espace.

L'équation de propagation dans le vide devient en régime sinusoïdal :

$$\nabla^2\underline{\overrightarrow{E}} = -\frac{\omega^2}{c^2}\underline{\overrightarrow{E}} \tag{53}$$

6.b. Régime quasi stationnaire

Soit L l'ordre de grandeur de la taille du système étudié. Par exemple pour un problème d'électrocinétique L est la taille du circuit. Lorsque la condition suivante est vérifiée :

$$\frac{\omega}{c} \ll \frac{1}{L} \tag{54}$$

on peut négliger la dérivée du champ électrique par rapport au temps dans l'équation (36). C'est l'approximation des régimes quasi stationnaires. On a alors dans le vide :

$$\nabla^2\underline{\overrightarrow{E}} = \overrightarrow{0} \tag{55}$$

En régime quasi stationnaire, il n'y donc pas de phénomène de propagation.

▷ Exercice : Déterminer la condition de régime quasi stationnaire pour $L = 10\ cm$.

En régime quasi stationnaire, le temps mis par la lumière pour parcourir le système est très petit devant la période d'oscillation des champs. Autrement dit, les temps de propagation d'un point à l'autre du système sont négligeables devant la période.

7. Énergie électromagnétique

7.a. Théorème de Poynting

En utilisant l'équation de Maxwell-Ampère, on écrit la puissance volumique reçue par les charges de la manière suivante :

$$\overrightarrow{j}\cdot\overrightarrow{E} = \frac{1}{\mu_0}\overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{B} - \epsilon_0\frac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t}\cdot\overrightarrow{E} \tag{56}$$

On utilise la formule de calcul vectoriel suivante :

$$div(\overrightarrow{E}\wedge\overrightarrow{B}) = \overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{E} - \overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{B} \tag{57}$$

En utilisant l'équation de Maxwell-Faraday, on obtient le résultat suivant (théorème de Poynting, physicien Anglais, 1852-1914) :

$$\boxed{div\left(\frac{\overrightarrow{E}\wedge\overrightarrow{B}}{\mu_0}\right)+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2\mu_0}\overrightarrow{B}^2+\frac{\epsilon_0}{2}\overrightarrow{E}^2\right)=-\overrightarrow{j}\cdot\overrightarrow{E}} \quad (58)$$

7.b. Conservation de l'énergie

Le théorème de Poynting exprime, sous forme locale, la conservation de l'énergie. Considérons tout d'abord la grandeur suivante, qui est une densité volumique d'énergie :

$$w_{em}=\frac{1}{2\mu_0}\overrightarrow{B}^2+\frac{\epsilon_0}{2}\overrightarrow{E}^2 \quad (59)$$

Il s'agit d'une énergie associée au champ électromagnétique. w_{em} est la *densité d'énergie électromagnétique*. En tout point de l'espace où un champ électromagnétique existe, il y a une densité d'énergie électromagnétique.

Considérons le vecteur suivant :

$$\boxed{\overrightarrow{\Pi}=\frac{1}{\mu_0}\left(\overrightarrow{E}\wedge\overrightarrow{B}\right)} \quad (60)$$

Il s'agit du *vecteur de Poynting*, qui a les dimensions d'une puissance par unité de surface. On remarque que c'est un vecteur polaire, produit vectoriel d'un vecteur polaire par un vecteur axial. On obtient finalement l'écriture suivante du théorème de Poynting :

$$\boxed{div\,\overrightarrow{\Pi}+\frac{\partial w_{em}}{\partial t}=-\overrightarrow{j}\cdot\overrightarrow{E}} \quad (61)$$

Pour interpréter cette équation en terme de conservation de l'énergie, il faut l'intégrer sur un volume V. L'intégrale de la divergence s'exprime, avec le théorème d'Ostrogradsky, comme le flux sortant du vecteur de Poynting sur la surface fermée S qui délimite le volume :

$$\iint_S \overrightarrow{\Pi}\cdot\overrightarrow{n}\,dS+\frac{d}{dt}\iiint_V w_{em}\,dv=-\iiint_V \overrightarrow{j}\cdot\overrightarrow{E} \quad (62)$$

Cette équation permet d'exprimer l'opposée du taux de variation de l'énergie électromagnétique contenue dans le volume :

-

$$\frac{d}{dt}\iiint_V w_{em}\,dv=\iiint_V \overrightarrow{j}\cdot\overrightarrow{E}+\iint_S \overrightarrow{\Pi}\cdot\overrightarrow{n}\,dS \quad (63)$$

On arrive ainsi à la loi de conservation de l'énergie :

La diminution par unité de temps de l'énergie électromagnétique dans un volume (délimité par une surface) est égale à la somme du flux sortant du vecteur de Poynting et de la puissance cédée aux charges dans le volume.

Le flux du vecteur de Poynting à travers une surface fermée représente donc l'énergie électromagnétique (par unité de temps) transférée entre le système et l'extérieur.

Le théorème de Poynting est la forme locale de la loi de conservation de l'énergie.

On remarque que l'énergie électromagnétique n'est pas en général une grandeur conservée, puisque des échanges avec les charges de la matière sont possibles. Ces échanges peuvent se faire dans un sens ou dans l'autre : la matière peut absorber de l'énergie électromagnétique, ou au contraire en émettre.

Dans le vide, il n'y pas d'échange avec la matière et le théorème de Poynting s'écrit :

$$div\,\overrightarrow{\Pi}+\frac{\partial w_{em}}{\partial t}=0 \tag{64}$$

L'énergie électromagnétique est alors conservée. Il est intéressant de remarquer l'analogie avec la forme locale de la conservation de la charge, qui est une grandeur toujours conservée.